

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur 10, le barème est indicatif.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, **toute réponse doit être justifiée.**

On rappelle que $\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} ; x \neq 0\}$.

Exercice 1. : 3 pts.

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction dérivable définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) := (x^4/4) - x + 7$. On rappelle qu'un réel $x \in \mathbb{R}$ est un point critique de h si la dérivée h' de h s'annule en x .

1. Donner une expression de h' . Déterminer $h'(1)$.
2. Trouver tous les points critiques de h .

Exercice 2. : 4 pts.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &:= x \sin(x) + 1 - \cos(x), \quad \text{si } x < 0, \\ f(x) &:= x^2 + x, \quad \text{si } x \geq 0. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner une expression de la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}^*$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0?

Exercice 3. : 3 pts.

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable telle que g et la dérivée g' de g soit positives, i.e. telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$ et $g'(x) \geq 0$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction dérivable définie par, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) := g\left((2x^3 + x - 3)g(x^4 + x^2 - 6x + 5)\right).$$

1. Donner une expression de la dérivée f' de f .
2. A-t-on, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$?

Exercice 1, 3 pts :

1. Par somme, on a, pour $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = x^3 - 1$. Donc $h'(1) = 0$.

1 pt.

2. **Version 1 :** Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $h'(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$. La fonction polynôme $x \mapsto x^2 + x + 1$ ne s'annule pas car son discriminant $1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$. On a donc, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = 0 \iff (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \iff x-1 = 0 \iff x = 1.$$

1 est donc le seul point critique de h .

Version 2 : La fonction h' est un polynôme donc est dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$, $h''(x) = 3x^2 \geq 0$. Sur $] -\infty; 0]$, h'' est positive donc h' est croissante donc, pour $x \leq 0$, $h'(x) \leq h'(0) = -1 < 0$. Sur $]0; +\infty[$, h'' est strictement positive donc h' est strictement croissante donc, pour $x \in [0; 1]$, $h'(x) < h'(1) = 0$ et, pour $x > 1$, $h'(x) > h'(1) = 0$. Donc h' ne s'annule qu'en 1.

2 pts.

Exercice 2, 4 pts :

1. Sur $]0; +\infty[$, f est une fonction polynôme donc dérivable et, pour $x > 0$, $f'(x) = 2x + 1$.

1 pt.

Sur $] -\infty; 0[$, f est la somme de produits de fonctions dérivables donc est dérivable et, pour $x < 0$, $f'(x) = 2 \sin(x) + x \cos(x)$.

1 pt.

2. Pour $x > 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + x}{x} = x + 1 \rightarrow 1,$$

quand $x \rightarrow 0^+$.

0,5 pt.

Pour $x < 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin(x) + 1 - \cos(x)}{x} = \sin(x) + \frac{1 - \cos(x)}{x},$$

Comme sinus est continue en 0 et cosinus est dérivable en 0, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin(x) = \sin(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x) - 1}{x} = -\sin(0) = 0.$$

Donc, par produit et somme,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Comme les limites à gauche et à droite du taux de variation en 0 de f sont différentes, f n'est pas dérivable en 0.

1,5 pts.

Exercice 3, 3 pts :

1. D'après les propriétés du cours, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= g' \left((2x^3 + x - 3) g(x^4 + x^2 - 6x + 5) \right) \\ &\quad \times \left((6x^2 + 1) g(x^4 + x^2 - 6x + 5) \right. \\ &\quad \left. + (2x^3 + x - 3) g'(x^4 + x^2 - 6x + 5) (4x^3 + 2x - 6) \right) \\ &= g' \left((2x^3 + x - 3) g(x^4 + x^2 - 6x + 5) \right) \\ &\quad \times \left((6x^2 + 1) g(x^4 + x^2 - 6x + 5) \right. \\ &\quad \left. + 2(2x^3 + x - 3)^2 g'(x^4 + x^2 - 6x + 5) \right). \end{aligned} \tag{1}$$

2 pts.

2. Par hypothèse, g et g' sont positives donc le premier facteur dans (1) est positif et on a $g(x^4 + x^2 - 6x + 5) \geq 0$ et $g'(x^4 + x^2 - 6x + 5) \geq 0$. Comme les carrés de réels sont positifs, on a aussi $6x^2 + 1 \geq 1 \geq 0$ et $(2x^3 + x - 3)^2 \geq 0$. Le terme dans la parenthèse de (1) est donc la somme de deux termes positifs donc est positif. D'où $f'(x) \geq 0$.

1 pt.