

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.
Interrogation notée sur 10, le barème est indicatif.

On rappelle que **toute réponse doit être justifiée.**

Exercice 1. : 2,5 pts.

Déterminer la négation des propositions

$$\mathcal{P} := \left(\forall x \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N}; \exists q \in \mathbb{N}^*; \quad (p > qx) \right),$$

$$\mathcal{Q} := \left(\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R} \quad ((u > v) \implies (u^2 > v^2)) \right).$$

Exercice 2. : 4 pts.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (1)$$

Exercice 3. : 5 pts.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation E_a d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = ax + 2. \quad (2)$$

On note par S_a l'ensemble des solutions de E_a .

1. Montrer que S_1 est vide.
2. Déterminer $S_{1/2}$.
3. Déterminer S_2 .

Exercice 1, 2,5 pts :

D'après le cours, on a

$$\text{non } \mathcal{P} \iff \left(\exists x \in \mathbb{R} ; \forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, (p \leq qx) \right).$$

1 pt.

D'après le cours, on a

$$\mathcal{Q} \iff \left(\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, \left((\text{non}(u > v)) \text{ ou } (u^2 > v^2) \right) \right).$$

Donc, par le cours, on a

$$\text{non } \mathcal{Q} \iff \left(\exists u \in \mathbb{R} ; \exists v \in \mathbb{R} ; \text{non} \left((\text{non}(u > v)) \text{ ou } (u^2 > v^2) \right) \right)$$

donc

$$\text{non } \mathcal{Q} \iff \left(\exists u \in \mathbb{R} ; \exists v \in \mathbb{R} ; ((u > v)) \text{ et } (u^2 \leq v^2) \right).$$

1,5 pts.**Exercice 2, 4 pts :**Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$\mathcal{P}(n) := \left(\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right).$$

0,25 pt.

Comme

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6},$$

 $\mathcal{P}(1)$ est vraie.**1 pt.**Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. D'après $\mathcal{P}(n)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^n k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n+1}{6} (6(n+1) + n(2n+1)) = \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{n+1}{6} (n+2)(2n+3) = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.**2 pts.**

Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

0,75 pt.

Exercice 3, 5 pts :

1. Soit $x \in S_1$. On a donc $x \neq 2$ et

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 2).$$

Donc

$$x^2 - x - 2 = x^2 - 4.$$

soit

$$4 - 2 = x$$

d'où $x = 2$. Contradiction. Donc $S_1 = \emptyset$.

1,5 pts.

2. Soit $x \in S_{1/2}$. On a donc $x \neq 2$ et

$$x^2 - x - 2 = (x - 2) \frac{1}{2}(x + 4).$$

Donc

$$2x^2 - 2x - 4 = x^2 + 2x - 8.$$

soit

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

ou encore

$$(x - 2)^2 = 0.$$

Par le cours, $x - 2 = 0$ donc $x = 2$. Contradiction. Donc $S_{1/2} = \emptyset$.

1,5 pts.

3. Pour $x = 2$, l'équation n'a pas de sens. Donc $S_2 \subset (\mathbb{R} \setminus \{2\})$. On résoud l'équation sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Pour $x \in (\mathbb{R} \setminus \{2\})$, on a, par le cours, comme $x - 2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} x \in S_2 &\iff x^2 - x - 2 = (x - 2)(2x + 2) \\ &\iff x^2 - x - 2 = 2x^2 - 2x - 4 \\ &\iff 0 = x^2 - x - 2. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ donnée par $y^2 - y - 2 = 0$ étant $1 + 4 \cdot 2 = 9 > 0$, cette équation a, par le cours, deux solutions :

$$y_1 = \frac{1 + 3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{1 - 3}{2} = -1.$$

Donc, comme $x \neq 2$, on a

$$x \in S_2 \iff x \in \{y_1; y_2\} \iff x = -1.$$

Par le cours, $S_2 = \{-1\}$.

2 pts.