

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur 10, le barème est indicatif.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1. : 4,5 pts.

Montrer que les limites suivantes existent et déterminer leur valeur :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 3x + 7}{x^2 + x - 5}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 3x + 1}{-x^2 + x + 2}.$$

Exercice 2. : 2 pts.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Déterminer explicitement l'ensemble $f^{-1}(\{9\})$.

Exercice 3. : 3,5 pts.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Les puissances de a sont définies par récurrence par les propriétés $a^0 = 1$ et, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}_p := (a^{p+1} = a a^p).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\mathcal{P}(n) := (\forall k \in \mathbb{N}, a^{n+k} = a^n a^k).$$

Montrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1, 4,5 pts :

Comme $x \rightarrow 0$, on a, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0} 4x^3 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. Donc, par somme, le numérateur de la fraction tend vers 7 tandis que le dénominateur tend vers $-5 \neq 0$. Par quotient, la limite étudiée existe et vaut $7/(-5) = -7/5$.

2 pts.

Pour $x > 0$, on a

$$\frac{5x^3 + 3x + 1}{-x^2 + x + 2} = \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{5 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{-1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = x \cdot \frac{5 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{-1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}. \quad (1)$$

Par le cours, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x) = 0$ donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$. Par somme, quand $x \rightarrow +\infty$, le numérateur de la dernière fraction dans (1) tend vers 5 tandis que le dénominateur tend vers $-1 \neq 0$. Donc, par quotient, cette fraction tend vers $5/(-1) = -5 < 0$, quand $x \rightarrow +\infty$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc, d'après l'égalité précédente et par produit, la limite étudiée existe et vaut $-\infty$.

2,5 pts.**Exercice 2, 2 pts :**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de l'ensemble $f^{-1}(\{9\})$ et par les propriétés du cours, on a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\{9\}) &\iff f(x) = 9 \iff x^2 - 9 = 0 \iff (x - 3)(x + 3) = 0 \\ &\iff x - 3 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -3 \\ &\iff x \in \{-3; 3\}. \end{aligned}$$

Par le cours, $f^{-1}(\{9\}) = \{-3; 3\}$.

Exercice 3, 3,5 pts :

Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la première propriété de l'énoncé, on a $a^{0+k} = a^k = 1 a^k = a^0 a^k$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

1 pt.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $a^{(n+1)+k} = a^{n+(k+1)}$ et, d'après $\mathcal{P}(n)$, $a^{n+(k+1)} = a^n a^{k+1}$. Par $\mathcal{D}_k$, on a $a^{k+1} = a a^k$ donc $a^n a^{k+1} = a^n a a^k$. Par $\mathcal{D}_n$, on a $a^n a = a a^n = a^{n+1}$ donc $a^{(n+1)+k} = a^n a a^k = a^{n+1} a^k$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

2 pts.

Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0,5 pt.