

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.
Interrogation notée sur 10, le barème est indicatif.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1. : 4,5 pts.

Montrer que les limites suivantes existent et déterminer leur valeur :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\ln(1+x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(\cos(x^2) - 1) - 1}{x^4}.$$

Il n'est pas interdit d'utiliser les développements limités mais on peut s'en passer.

Exercice 2. : 1,5 pts.

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sin\left(\ln(1 + 3x^2)\right).$$

D'après le cours, la fonction g est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Déterminer une expression explicite de $g'(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. : 5 pts.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$.

1. Montrer que f est dérivable et que f' l'est aussi.
2. Déterminer les variations et le signe de f' .
3. En déduire les variations de f .
4. Donner, **sans justification**, la valeur des limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
5. Donner, **sans justification**, les éventuelles asymptotes de f .
6. Donner l'allure du graphe de f en respectant les résultats précédents.

Exercice 1, 4,5 pts :

Pour $x \neq 0$, proche de 0, on a

$$\frac{\sin(4x)}{\ln(1+x)} = 4 \frac{\sin(4x)}{4x} \frac{x}{\ln(1+x)}. \quad (1)$$

Par le cours, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \neq 0$ donc, par inversion, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1/1 = 1$. Par le cours, $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} 4x = 0$, par produit, on en déduit, par composition, que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{4x} = 1$. D'après (1), on a donc, par produit,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\ln(1+x)} = 4.$$

1,5 pts.

Pour $x \neq 0$, proche de 0, on a

$$\frac{\exp(\cos(x^2) - 1) - 1}{x^4} = \frac{\exp(\cos(x^2) - 1) - 1}{\cos(x^2) - 1} \cdot \frac{\cos(x^2) - 1}{(x^2)^2}. \quad (2)$$

Par le cours, $\lim_{y \rightarrow 0} (\cos(y) - 1) = 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(y) - 1}{y^2} = -1/2$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, par produit, on en déduit, par composition, que $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x^2) - 1) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{(x^2)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Par le cours, $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\exp(y) - 1}{y} = 1$ donc, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(\cos(x^2) - 1)}{\cos(x^2) - 1} = 1.$$

D'après (2), on a donc, par produit,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(\cos(x^2) - 1) - 1}{x^4} = -\frac{1}{2}.$$

3 pts.

Exercice 2, 1,5 pts :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(\ln(1 + 3x^2)) (\ln(1 + 3x^2))' \\ &= \cos(\ln(1 + 3x^2)) \frac{1}{1 + 3x^2} (1 + 3x^2)' \\ &= \cos(\ln(1 + 3x^2)) \frac{1}{1 + 3x^2} 6x. \end{aligned}$$

Exercice 3, 5 pts :

1. Par les cours, les fonctions polynômes et l'exponentielle sont dérivables. Donc f est dérivable par composition et produit. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 (-1) e^{-x} = x(2 - x) e^{-x}.$$

Donc f' est aussi dérivable par composition, somme et produit et, pour pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 e^{-x} + 2x (-1) e^{-x} + 2x (-1) e^{-x} + x^2 e^{-x} \\ &= e^{-x} (2 - 4x + x^2) = e^{-x} ((x - 2)^2 - 2) \\ &= e^{-x} (x - 2 - \sqrt{2}) (x - 2 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

1,5 pts.

2. D'après l'expression de f'' dans 1, f'' est strictement positive sur $] - \infty; 2 - \sqrt{2}[$ et sur $]2 + \sqrt{2}; +\infty[$, strictement négative sur $]2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}[$. Donc f' est strictement croissante sur $] - \infty; 2 - \sqrt{2}]$ et sur $[2 + \sqrt{2}; +\infty[$, et strictement décroissante sur $[2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}]$. D'après la dernière expression de f' dans 1, f' est strictement positive sur $]0; 2[$, strictement négative sur $] - \infty; 0[$ et sur $]2; +\infty[$, nulle en 0 et en 2.

1,5 pts.

3. D'après 2, f est strictement décroissante sur $] - \infty; 0]$, strictement croissante sur $[0; 2]$ et strictement décroissante sur $[2; +\infty[$. On a $f(0) = 0$ et $f(2) > 0$.

0,5 pt.

4. On a $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = 0$ (l'exponentielle "l'emporte sur le polynôme").

0,5 pt.

5. La fonction f n'a pas d'asymptote verticale. Elle n'a pas d'asymptote en $-\infty$. Elle a la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

0,5 pt.

6. Voir dessin.

0,5 pt.