L1S2, Analyse 2, Gr. CUPGE.

Contrôle continu du 1er mars 2024, **45 min.**.

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.
Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif.

On rappelle que $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que $\mathbb{R}^{+*} := \{x \in \mathbb{R}\,;\ x > 0\}$ et que, pour $a \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$, $I(a;r] := \{x \in \mathbb{R}\,;\ |x-a| \leq r\}$.

Exercice 1. : 4 pts.
Montrer la validité des propositions suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \Big(\forall\, x \in \big([-3;-2] \cup [1;7[\big)\,, \quad |x| \leq 8\Big)\,,\\
\mathcal{Q} &= \big(\forall\, x \in]0;1[\,, \exists\, y \in \mathbb{R}^{+*}\,;\ x^5 < y < x^3\big)\,.
\end{aligned}$$

Exercice 2. : 4 pts.
Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'inéquation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, donnée par

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} \geq 1\,. \tag{1}$$

Exercice 3. : 13 pts.
Déterminer la borne supérieure des ensembles non vides suivants :

$$A := [-1;1]\,, \quad B :=]-3;7] \cap \big([-4;1] \cup [2;5]\big)\,, \quad C := [-1;0[\,,$$

$$D := \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I\Big(0;\frac{1}{n}\Big] := \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, x \in I\Big(0;\frac{1}{n}\Big]\right\}$$

et

$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I\Big(0;\frac{1}{n}\Big] := \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ \exists\, n \in \mathbb{N}^*\,, x \in I\Big(0;\frac{1}{n}\Big]\right\}\,.$$

L1S2, Analyse 2, CUPGE.

Corrigé du contrôle continu du 1er mars 2024.

Exercice 1, 4 pts :
Preuve de $\mathcal{P}$: Soit $x \in ([-3;-2] \cup [1;7[)$. Si $x \in [-3;-2]$ alors $-8 \leq -3 \leq x \leq -2 \leq 8$. Si $x \in [1;7[$ alors $-8 \leq 1 \leq x < 7 \leq 8$. Donc $x \in [-8;8]$. Par le cours, $x \in I(0;8]$ donc $|x| \leq 8$.
1,5 pts.
Preuve de $\mathcal{Q}$: Soit $x \in]0;1[$. Comme $x > 0$, on a $x^2 > 0$ donc $x^3 > 0$ et $x^4 > 0$ et aussi $x^5 > 0$. Comme $x < 1$ et $x > 0$, on a $0 \leq x^2 < x < 1$. En multipliant par x^3 dans l'inégalité $x^2 < 1$, on obtient $x^5 < x^3$. Par le cours, on sait qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x^5 < y < x^3$. Comme $x^5 > 0$, $y > 0$.
2,5 pts.

Exercice 2, 4 pts :
Version 1 : Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $x \in \mathcal{S}$. Donc $x^2 \neq 1$ et (1) est vraie. Si $|x| < 1$ alors $|x|^2 < |x| < 1$. Comme $x^2+1 \geq 1 > 0$, la fraction dans (1) est négative donc (1) est fausse. Contradiction. Si $|x| = 1$ alors $x^2 = |x|^2 = 1$. Contradiction. Donc $|x| > 1$, c'est-à-dire $x \in A$ où $A =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.
Soit $x \in A$. On a $|x| > 1$ donc $x^2 = |x|^2 > |x| > 1$ et $x^2 - 1 \neq 0$. La fraction dans (1) est bien définie. De plus, comme $x^2+1 \geq x^2-1$ et $x^2-1 > 0$, on a, par division par x^2-1, la propriété (1). Donc $x \in \mathcal{S}$.
On a montré que $\mathcal{S} = A =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.
Version 2 : L'équation $x^2 = 1$ a deux solutions : -1 et 1. La fraction dans (1) n'est donc bien définie que pour $x \in B$, où $B = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\begin{aligned}
&(x \in \mathcal{S}) \\
\iff &\big((x \in \mathcal{S}) \text{ et } (x \in B)\big) \\
\iff &\big(((1) \text{ est vraie}) \text{ et } (x \in B)\big) \\
\iff &\big(((1) \text{ est vraie}) \text{ et } (|x| > 1) \text{ et } (x \in B)\big) \text{ ou } \big(((1) \text{ est vraie}) \text{ et } (|x| < 1) \text{ et } (x \in B)\big) \\
\iff &\big(((1) \text{ est vraie}) \text{ et } (|x| > 1)\big) \text{ ou } \big(((1) \text{ est vraie}) \text{ et } (|x| < 1)\big)\,.
\end{aligned}$$

Pour $|x| < 1$, on a $x^2 = |x|^2 < |x| < 1$, soit $x^2 - 1 < 0$ alors que $x^2+1 \geq 1 > 0$. La fraction dans (1) est négative donc (1) est fausse. De plus, pour $|x| > 1$, on a $x^2 = |x|^2 > |x| > 1$ soit $x^2 - 1 > 0$ donc

$$\begin{aligned}
(x \in \mathcal{S}) &\iff \big(((1) \text{ est vraie}) \text{ et } (|x| > 1)\big) \\
&\iff \big((x^2+1 \geq x^2-1) \text{ et } (|x| > 1)\big) \\
&\iff \big((1 \geq -1) \text{ et } (|x| > 1)\big) \\
&\iff (|x| > 1)\,,
\end{aligned}$$

puisque la proposition $(1 \geq -1)$ est vraie. On a montré que $\mathcal{S} =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

Exercice 3, 13 pts :
Borne supérieure de A : On remarque que $1 \in A$. De plus, par définition de A, 1 majore A. Par définition, 1 est le maximum de A. Par le cours, 1 est la borne supérieure de A.
1,5 pts.
Borne supérieure de B : On a $5 \in]-3;7]$. On a $5 \in [2;5]$ donc $5 \in ([-4;1] \cup [2;5])$. D'où $5 \in B$. De plus, 5 majore $[-4;1]$ et 5 majore $[2;5]$ donc 5 majore $[-4;1] \cup [2;5]$. Comme B est inclu dans $[-4;1] \cup [2;5]$, 5 majore aussi B. Par définition, 5 est le maximum de B. Par le cours, 5 est aussi la borne supérieure de B.
2,5 pts.
Borne supérieure de C : On note que 0 majore C. Supposons qu'on ait un majorant m de C tel que $m < 0$. Comme m majore C et $-1 \in C$, on a $m \geq -1$ et $-1 \leq m < 0$. Par le cours, on sait qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $m < x < 0$. Comme $x < 0$ et $x > m \geq -1$, $x \in C$. Comme m majore C, $m \geq x$. Contradiction avec $m < x < 0$. C n'admet donc aucun majorant strictement plus petit que 0 donc 0 est le plus petit majorant de C. Par définition, O est donc la borne supérieure de C. **4 pts.**
Borne supérieure de D :
Version 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|0-0| \leq (1/n)$ donc $0 \in I(0;1/n]$. Donc $0 \in D$. Soit $x \in D$. Supposons $x > 0$. Soit $n = E(1/x) + 1 \in \mathbb{N}^*$. On a $n > (1/x)$ donc $|x| = x > (1/n)$. En particulier, $x \notin I(0;1/n]$. Contradiction avec le fait que $x \in D$.
Donc $x \leq 0$. On a montré que 0 majore D. Par définition, 0 est le maximum de D. Par le cours, 0 est la borne supérieure de D.
Version 2 : On montre que $D = \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|0-0| \leq (1/n)$ donc $0 \in I(0;1/n]$. Donc $0 \in D$ et $\{0\} \subset D$. Soit $x \in D$. Supposons $x \neq 0$. On a $|x| > 0$. Soit $N = E(1/|x|) + 1 \in \mathbb{N}^*$. On a $N > 1/|x|$ donc $|x| > (1/N)$ et $|x - 0| = |x| > (1/N)$ donc $x \notin I(0;1/N]$. Contradiction avec le fait que $x \in D$. D'où $x = 0$. On a montré que $D \subset \{0\}$. Conclusion : $D = \{0\}$.
Comme 0 appartient à D et majore D, 0 est le maximum de D. Par le cours, 0 est la borne supérieure de D.
3 pts.
Borne supérieure de E :
Version 1 : Soit $x \in E$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I(0;1/n]$. Par le cours, $-(1/n) \leq x \leq (1/n)$. Comme $n \geq 1$, $1/n \leq 1$. D'où $x \leq 1$. On a montré que 1 majore E. Par le cours, $I(0;1/1] = [-1;1]$ donc $1 \in I(0;1/1]$. En particulier, $1 \in E$. Par définition, 1 est le maximum de E. Par le cours, 1 est la borne supérieure de E.
Version 2 : On montre que $E = A$. Soit $x \in E$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in I(0;1/n]$. Par le cours, $-(1/n) \leq x \leq (1/n)$. Comme $n \geq 1$, $1/n \leq 1$ et $-1 \leq -(1/n)$. D'où $-1 \leq x \leq 1$, c'est-à-dire $x \in A$. On a montré que $E \subset A$. Soit $x \in A$. Par le cours, $I(0;1/1] = [-1;1] = A$ donc $x \in I(0;1/1]$ et $x \in E$. On a montré que $A \subset E$. Conclusion : $E = A$. Donc $\sup E = \sup A = 1$, d'après ce qui précède.
2 pts.