L1S2, Analyse 2, Gr. CUPGE.

Contrôle continu du 26 avril 2024, **55 min.**.

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.
Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif.
Toute réponse doit être justifiée.

On rappelle que $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et que l'on note par sin la fonction sinus. On note par E la fonction partie entière, dont on pourra utiliser les propriétés données en cours et celles démontrées en td.

Exercice 1. : 6 pts.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^2 + 5x + 4$.

1. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 1 = (x + 1)(2x + 3)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in]-2; 0[$,
$$|f(x) - 1| \leq 7\,|x + 1|\,. \tag{1}$$
3. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou l'une de ses formulations équivalentes, que f admet une limite finie en -1.

Exercice 2. : 4 pts.
Déterminer la borne supérieure $\sup A$ de l'ensemble
$$A := \big([-4; 1] \cup [2; 7]\big) \cap \big(]-5; -3[\cup [1; 3[\big)\,.$$

Exercice 3. : 6 pts.
Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sin(1/x) + 2x + 1$, si $x > 0$, et par $f(x) = (x - 1)^2$, si $x < 0$. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, prolongement noté $\hat{f}$. Déterminer explicitement $\hat{f}$.

Exercice 4. : 5 pts.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = E(x - E(x))$ et $g(x) = E(x) + E(2 - x)$.

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que $\lim\limits_{\neq 1} g$ existe dans $\mathbb{R}$.
3. La fonction g est-elle continue en 1 ?

L1S2, Analyse 2, CUPGE.

Corrigé du contrôle continu du 26 avril 2024.

Exercice 1, 6 pts :

1. Le discriminant de $f-1$ est $\Delta = 25 - 4\cdot 2\cdot 3 = 1$. Donc, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= 2x^2 + 5x + 3 = 2\left(x - \frac{-5+1}{4}\right)\left(x - \frac{-5-1}{4}\right) \\ &= 2(x+1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x+1)(2x+3)\,. \quad \textbf{2 pts.} \end{aligned}$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a, d'après 1, $|f(x)-1| = |x+1|\cdot|2x+3|$. Pour $x \in]-2;0[$, on a $|x| = -x \in]0;2[$ donc $|2x+3| \leq 2|x| + 3 \leq 4+3 = 7$. D'où, pour $x \in]-2;0[$, $|f(x)-1| \leq 7|x+1|$. **1,5 pts.**

3. **Version 1 :** Soit $\epsilon > 0$. On pose $\delta = \min(1;\epsilon/7) > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $|x+1| < \delta$. Comme $\delta \leq 1$, on a $x \in]-1-1;-1+1[=]-2;0[$. Donc, par 2, $|f(x)-1| \leq 7|x+1| < 7\delta \leq \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{-1} f = 1$.
   Version 2 : D'après le cours, il suffit de montrer l'existence de la limite en -1 de la restriction g de f à $]2;0[$. Soit $\epsilon > 0$. On pose $\delta = \epsilon/7 > 0$. Soit $x \in]2;0[$ avec $|x+1| < \delta$. Comme $x \in]2;0[$, on a, par 2, $|f(x)-1| \leq 7|x+1| < 7\delta = \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{-1} g = 1$ et donc que $\lim\limits_{-1} f = 1$.
   2,5 pts.

Exercice 2, 4 pts :
Version 1 : Soit $B =]-5;-3[\cup [1;3[$. Comme $-3 \leq 3$, 3 majore B. Comme $A \subset B$, 3 majore A.
1 pt.
Soit
$$u = \left(3 - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $n \geq 1$, $1 \geq (1/n) > 0$ donc $-1 \leq -(1/n) < 0$ et $2 \leq u_n < 3$. Donc $u_n \in [2;3[$. Comme $[2;3[\subset B$ et comme $[2;3[\subset [2;7]$, $[2;3[\subset A$. Donc u est une suite d'éléments de A. De plus, comme $\lim(1/n) = 0$ (cf. cours), $\lim u = 3$, par produit et somme. **2,5 pts.**
Par le cours, $\sup A = 3$. **0,5 pt.**
Version 2 : Soit $B =]-5;-3[\cup [1;3[$. Comme $-3 \leq 3$, 3 majore B. Comme $A \subset B$, 3 majore A.
1 pt.
Supposons qu'il existe un majorant $m \in \mathbb{R}$ de A tel que $m < 3$. Comme $2 \in [1;3[$, $2 \in B$.

Comme $2 \in [2;7]$, $2 \in A$. Comme m majore A, $m \geq 2$. Soit $a = (m+3)/2 \in]m;3[$ (cf. td). Comme $m \geq 2$, $a \in [2;3[$. Comme $[2;3[\subset B$ et $[2;3[\subset [2;7]$, $[2;3[\subset A$ d'où $a \in A$. Comme m majore A, $m \geq a$, ce qui contredit $a \in]m;3[$. Il n'existe donc pas de majorant de A qui soit strictement plus petit que 3 donc 3 est le plus petit majorant de A, c'est-à-dire la borne supérieure de A. **3 pts.**

Exercice 3, 6 pts :
Soit $f^+ := f_{|]0;+\infty[}$ et $f^- := f_{|]-\infty;0[}$.
Pour $x > 0$, on a, d'après les propriétés de la fonctions sinus,

$$|f^+(x) - 1| \leq \big|x \cdot \sin(1/x)\big| + 2|x| \leq |x| + 2|x| = 3|x| = 3x .$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ (cf. cours), on a, par produit, $\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$. Par le cours, $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x = 0$ et, d'après l'inégalité précédente et le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{0} f^+ = 1$. Donc $\lim\limits_{0^+} f = 1$. **2,5 pts.**
Comme $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ (cf. cours), $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)^2 = (-1)^2 = 1$, par somme et produit. Par le cours, $\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)^2 = 1$ donc $\lim\limits_{0} f^- = 1$ et $\lim\limits_{0^-} f = 1$. **1,5 pts.**
Comme $\lim\limits_{0^-} f = 1 = \lim\limits_{0^+} f$, $\lim\limits_{0} f$ existe et vaut $1 \in \mathbb{R}$, par le cours. Donc f se prolonge par continuité en 1 et son prolongement est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\hat{f}(x) = f(x)$, si $x \neq 0$, et $\hat{f}(0) = 1$. **2 pts.**

Exercice 4, 5 pts :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a, par le cours, $E(x) \leq x < E(x) + 1$ donc $0 \leq x - E(x) < 1$. Comme la fonction E est nulle sur $[0;1[$, la fonction f est nulle. Par le cours, elle est continue. **1 pt.**

2. Soit $h :]1/2;3/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = 2 - x$. Comme $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue (cf. cours), h est continue par produit et somme. De plus, $h(1) = 1$.
   Pour étudier la limite à droite en 1 de g, il suffit d'étudier la limite en 1 de $g_{|]1;3/2[}$. Comme h envoie $]1;3/2[$ dans $]1/2;1[$ et comme $\lim\limits_{1^-} E = 0$ (cf. td), $\lim\limits_{x\to 1^+} E(h(x)) = 0$, par composition. Comme $\lim\limits_{1^+} E = 1$ (cf. td), $\lim\limits_{1^+} g = 1$, par somme. **1,5 pts.**
   Pour étudier la limite à gauche en 1 de g, il suffit d'étudier la limite en 1 de $g_{|]1/2;1[}$. Comme h envoie $]1/2;1[$ dans $]1;3/2[$ et comme $\lim\limits_{1^+} E = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} E(h(x)) = 1$, par composition. Comme $\lim\limits_{1^-} E = 0$, $\lim\limits_{1^-} g = 1$, par somme. **1,5 pts.**
   Comme $\lim\limits_{1^-} g = \lim\limits_{1^+} g = 1$, $\lim\limits_{\neq 1} g$ existe et vaut 1, par le cours. **0,5 pt.**

3. Comme $g(1) = E(1) + E(1) = 2 \neq 1 = \lim\limits_{\neq 1} g$, g n'a pas de limite en 1, par le cours. Donc g n'est pas continue en 1. **0,5 pt.**