L1S2, Analyse 2, Gr. D.

Contrôle continu du 29 février 2024, **55 min.**.

**L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.**
Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif.

On rappelle que $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et que $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}\,;\ x \geq 0\}$.

**Exercice 1. : 4 pts.**
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (7^n \geq n+3)$.

1. Montrer que $\mathcal{P}(0)$ est fausse et que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
2. Montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 2. : 6 pts.**
Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, donnée par

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} \;=\; -(x+1)\,. \tag{1}$$

**Exercice 3. : 5 pts.**
Montrer la validité des propositions suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \big(\forall\, x \in ]2;+\infty[\,,\ x^2 - 3 \;\geq\; 0\big)\,,\\
\mathcal{Q} &= \Big(\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, y \in \mathbb{R}^+\,;\ y > x^3\Big)\,,\\
\mathcal{R} &= \Big(\forall\, x \in \mathbb{R}^+\,,\quad \big(x \leq -1\big) \implies \big(x^2 + 1 \leq 0\big)\Big)\,.
\end{aligned}$$

**Exercice 4. : 7 pts.**
Déterminer la borne supérieure des ensembles non vides suivants :

$$A \;:=\; [-3;3] \cup ]-5;1[\,,\quad B \;:=\; [1;3[$$

et

$$C \;:=\; \left\{-\frac{1}{n}\,,\, n \in \mathbb{N}^*\right\} \,\cap\, \left[-1; -\frac{1}{7{,}5}\right]\,.$$

L1S2, Analyse 2, Gr. D.

Corrigé du contrôle continu du 29 février 2024.

**Exercice 1, 4 pts** :

1. $\mathcal{P}(0)$ est fausse car $7^0 = 1 < 3 = 0 + 3$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie car $7^1 = 7 \geq 4 = 1 + 3$. **1 pt.**
2. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $7^n \geq n+3$. Donc $7^{n+1} = 7 \cdot 7^n \geq 7(n+3)$. Or $7(n+3)-(n+1+3) = 6n+17 \geq 0$ car $n \geq 0$. Donc $7(n+3) \geq (n+1+3)$. D'où $7^{n+1} \geq n+1+3$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Comme $\mathcal{P}(1)$ est vraie par 1, on a, par le théorème de récurrence, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. **3 pts.**

**Exercice 2, 6 pts** :
Soit $x \in \mathbb{R}$. La fraction dans (1) n'a pas de sens pour $x = 2$. Donc ($x \in \mathcal{S}$) est équivalente à (((1) est vraie) et ($x \neq 2$)). D'où

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{S} &\iff \big(x^2 - 5x + 6 \ = \ -(x+1)(x-2) \quad \text{et} \quad x \neq 2\big) \\ &\iff \big(x^2 - 5x + 6 \ = \ -x^2 + x + 2 \quad \text{et} \quad x \neq 2\big) \\ &\iff \big(2x^2 - 6x + 4 \ = \ 0 \quad \text{et} \quad x \neq 2\big) \\ &\iff \big(x^2 - 3x + 2 \ = \ 0 \quad \text{et} \quad x \neq 2\big)\,. \end{aligned}$$

La fonction polynôme $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$ donc a pour racines $(3-1)/2 = 1$ et $(3+1)/2 = 2$. On a donc

$$x \in \mathcal{S} \iff \big(x \in \{1; 2\} \quad \text{et} \quad x \neq 2\big) \iff (x = 1)\,.$$

On a donc montré que $\mathcal{S} = \{1\}$.

**Exercice 3, 5 pts** :
Preuve de $\mathcal{P}$ : Soit $x \in ]2; +\infty[$. On a $x - 2 \geq 0$ et $x \geq 0$. Donc $x + 2 \geq 0$. On a donc $x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \geq 0$, soit $x^2 \geq 4$. D'où $x^2 - 3 \geq 4 - 3 = 1 \geq 0$.
Alternative : Soit $x \in ]2; +\infty[$. On a $x \geq 2$. Comme la fonction $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^2$ est croissante (cf. td), on a $x^2 \geq 2^2 = 4$. D'où $x^2 - 3 \geq 4 - 3 = 1 \geq 0$.
**2 pts.**
Preuve de $\mathcal{Q}$ : Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = |x^3| + 1$. Comme $|x^3| \geq 0$, $y \geq 1 \geq 0$ donc $y \in \mathbb{R}^+$. De plus, $y > |x^3| \geq x^3$, d'après la définition de la valeur absolue.
**2 pts.**
Preuve de $\mathcal{R}$ : Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Comme la proposition ($x \leq -1$) est fausse, l'implication dans $\mathcal{R}$ est vraie. On a montré que $\mathcal{R}$ est vraie.
**1 pt.**

**Exercice 4, 7 pts** :
Borne supérieure de $A$ : On remarque que $3 \in [-3; 3]$ donc $3 \in A$. On remarque que 3 majore $[-3; 3]$ et aussi $]-5; 1[$ donc 3 majore $A$. Par définition, 3 est le maximum de $A$.

Par le cours, 3 est aussi la borne supérieure de $A$.
**2 pts.**
Borne supérieure de $B$ : On note que 3 majore $B$. Supposons qu'on ait un majorant $m$ de $B$ tel que $m < 3$. Comme $m$ majore $B$ et $1 \in B$, on a $m \geq 1$ donc $1 \leq m < 3$. Par le cours, on sait qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $m < x < 3$. Comme $x < 3$ et $x > m \geq 1$, $x \in B$. Comme $m$ majore $B$, $m \geq x$. Contradiction avec $m < x < 3$. $B$ n'admet donc aucun majorant strictement plus petit que 3 donc 3 est le plus petit majorant de $B$. Par définition, 3 est donc la borne supérieure de $B$.
**3 pts.**
Borne supérieure de $C$ : On remarque que $C$ est l'ensemble fini :

$$\left\{-1\,;\ -\frac{1}{2}\,;\ -\frac{1}{3}\,;\ -\frac{1}{4}\,;\ -\frac{1}{5}\,;\ -\frac{1}{6}\,;\ -\frac{1}{7}\right\}.$$

$-1/7$ appartient donc à $C$ et majore $C$. C'est donc le maximum de $C$. Par le cours, c'est aussi la borne supérieure de $C$.
**2 pts**.