L1S2, Analyse 2, Gr. D.

Contrôle continu du 25 avril 2024, **55 min.**.

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.
Interrogation notée sur 20, le barème est indicatif.
Toute réponse doit être justifiée.

On rappelle que $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et que l'on note par sin la fonction sinus.

Exercice 1. : 5 pts.
Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x + 4$, si $x > 0$, et par $f(x) = (x + 2)^2$, si $x < 0$. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, prolongement noté $\hat{f}$. Déterminer explicitement $\hat{f}$.

Exercice 2. : 5 pts.
Déterminer la borne supérieure $\sup A$ et la borne inférieure $\inf A$ de l'ensemble $A :=]-1; 0[\cup [2; 3[$.

Exercice 3. : 4 pts.
Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou l'une de ses formulations équivalentes, que

$$\lim_{x \to +\infty} 3 - \frac{2}{x}$$

existe dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4. : 7 pts.
Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \sin(1/x)$ et $g(x) = x \sin(1/x^2)$. Ont-elles une limite en 0 ? Si oui, déterminer cette limite.

L1S2, Analyse 2, Gr. D.

Corrigé du contrôle continu du 25 avril 2024.

Exercice 1, 5 pts :

Version 1 :
Par le cours, on sait que $\lim_{x\to 0} x = 0$. Donc, par le cours, $\lim_{x\to 0^+} x = \lim_{x\to 0^-} x = 0$. Comme $\lim_{x\to 0^+} x = 0$, on a, par somme et produit, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -0 + 4 = 4$. Comme $\lim_{x\to 0^-} x = 0$, on a, par somme et produit, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = (0+2)^2 = 4$. Comme $\lim_{0^+} f = \lim_{0^-} f = 4$, $\lim_{0} f$ existe et vaut 4, par le cours. Comme $4 \in \mathbb{R}$, f admet un prolongement par continuité en 0 et $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est défini par $\hat{f}(x) = f(x)$, si $x \neq 0$, et $\hat{f}(0) = 4$.
Version 2 :
Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -x + 4$ et $h(x) = (x+2)^2$. Comme l'application $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\mathrm{Id}(x) = x$, est continue (cf. cours), on a par somme et produit, la continuité de g et celle de h.
Par le cours, $\lim_{0^+} g = \lim_{0} g = g(0) = 4$ et, comme $f_{|]0;+\infty[} = g_{|]0;+\infty[}$, $\lim_{0^+} f = \lim_{0^+} g = 4$.
Par le cours, $\lim_{0^-} h = \lim_{0} h = h(0) = 4$ et, comme $f_{|]-\infty;0[} = h_{|]-\infty;0[}$, $\lim_{0^-} f = \lim_{0^-} h = 4$.
Comme $\lim_{0^+} f = \lim_{0^-} f = 4$, $\lim_{0} f$ existe et vaut 4, par le cours. Comme $4 \in \mathbb{R}$, f admet un prolongement par continuité en 0 et $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est défini par $\hat{f}(x) = f(x)$, si $x \neq 0$, et $\hat{f}(0) = 4$.

Exercice 2, 5 pts :
Détermination de $\sup A$:
Version 1 : Par définition de A et le fait que $3 \geq 0$, 3 majore A. Soit $u = (3 - (1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $n \geq 1$, $0 < 1/n \leq 1$ donc $0 > -(1/n) \geq -1$ d'où $3 > u_n \geq 2$. Donc $u_n \in A$. La suite u est donc une suite d'éléments de A. Comme $\lim (1/n) = 0$ (cf. cours), on a $\lim u = 3$, par produit et somme. Par le cours, $3 = \sup A$.
Version 2 : Par définition de A et le fait que $3 \geq 0$, 3 majore A. Supposons qu'on ait un majorant $m \in \mathbb{R}$ de A tel que $m < 3$. Comme $2 \in [2;3[$, $2 \in A$. Comme m majore A, $m \geq 2$. Soit $a = (m+3)/2 \in]m;3[$ (cf. td). Comme $m \geq 2$, $a \in [2;3[$ et $a \in A$. Comme m majore A, $m \geq a$, ce qui contredit $a \in]m;3[$. Il n'y a donc aucun majorant de A qui soit strictement inférieur à 3 donc 3 est le plus petit majorant de A, c'est-à-dire la borne supérieure de A.
2,5 pts.
Détermination de $\inf A$:
Version 1 : Par définition de A et le fait que $-1 \leq 2$, -1 minore A. Soit $v = (-1 + (1/n))_{n\in[\![2;+\infty[\![}$. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Comme $n \geq 2$, $1/2 \geq 1/n > 0$ donc $0 > -1/2 \geq -1 + (1/n) > -1$. Donc $v_n \in A$. La suite v est donc une suite d'éléments de A. Comme $\lim (1/n) = 0$ (cf. cours), on a $\lim v = -1$, par somme. Par le cours, $-1 = \inf A$.
Version 2 : Par définition de A et le fait que $-1 \leq 2$, -1 minore A. Supposons qu'on ait un minorant $m \in \mathbb{R}$ de A tel que $m > -1$. Comme $-1/2 \in]-1;0[$, $-1/2 \in A$ et, comme m minore A, $m \leq -1/2$. Soit $a = (-1+m)/2 \in]-1;m[$ (cf. td). Comme $m \leq -1/2$,

$a \in]-1;0[$ donc $a \in A$. Comme m minore A, $m \leq a$, ce qui contredit $a \in]-1;m[$. Il n'y a donc aucun minorant de A qui soit strictement supérieur à -1 donc -1 est le plus grand minorant de A, c'est-à-dire la borne inférieure de A.
2,5 pts.

Exercice 3, 4 pts :
Soit $\epsilon > 0$. On pose $A = 2/\epsilon > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x > A$. On a $x > (2/\epsilon)$ et, comme $x > 0$ et $\epsilon > 0$,

$$\epsilon \ > \ \frac{2}{x} \ = \ \left| \left(3 - \frac{2}{x}\right) - 3 \right| \ .$$

On a montré que $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - (2/x) = 3$.

Exercice 4, 7 pts :
Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a, d'après les propriétés de sinus, $|\sin(1/x^2)| \leq 1$ donc $|g(x)| \leq |x|$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ (cf. cours), on a donc, par le cours, $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} |x| = 0$.

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{0} g$ existe et vaut 0. **3 pts.**
On considère les suites

$$u \ = \ \left(\frac{1}{2n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \text{et} \quad v \ = \ \left(\frac{1}{(\pi/2) + 2n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \ .$$

Ces suites ne s'annulent pas donc les suites $f \circ u$ et $f \circ v$ sont bien définies. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(u_n) = \sin(2n\pi) = 0$ et $f(v_n) = \sin((\pi/2) + 2n\pi) = 1$. La suite $f \circ u$ est nulle donc tend vers 0, par le cours. La suite $f \circ v$ est constante égale à 1 donc tend vers 1, par le cours.
D'autre part, comme $\lim(1/n) = 0$ (cf. cours), on a, par produit, $\lim u = 0$. Comme $\lim n = +\infty$ (cf. cours), $\lim v = 0$, par produit, somme et quotient.
Supposons que $\ell = \lim\limits_{0} f$ existe. Comme $\lim u = 0$ et $\lim v = 0$, on a, par le cours, $\lim f \circ u = \ell = \lim f \circ v$. D'après ce qui précède, on obtient $0 = \ell = 1$. Contradiction. Donc f n'a pas de limite en 0. **4 pts.**