

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur **20**, le barème est indicatif.

Sauf mention contraire explicite, toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1. : 6 pts. Questions de cours.

1. Donner la définition d'une norme N sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .
2. Donner la définition d'un voisinage V d'un point a d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé $(E; N)$.
3. Donner la définition de la convergence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé $(E; N)$ vers un vecteur ℓ de E .

Exercice 2. : 9 pts. Soit $E := \mathbb{R}[X]$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On considère sur E les normes $\|\cdot\|_1$ et N définies par, pour

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in E, \quad \|P\|_1 = \sum_{k=0}^d |a_k| \quad \text{et} \quad N(P) = \int_0^1 |P(t)| dt.$$

1. Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^2 - X^n$, tend vers le polynôme X^2 pour la norme N .
2. Soit $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = X - \sqrt{n}(X-1)^n$. La suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente pour la norme N ? Justifier toute réponse.
3. Soit $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n := \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}.$$

La suite réelle $(\|R_n\|_1)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ? La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente pour la norme $\|\cdot\|_1$? Justifier toute réponse.

Exercice 3. : 6 pts.

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$. Sur E , on considère la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par, pour $f \in E$,

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|.$$

Soit

$$A := \{f \in E; \forall t \in [0; 1], f(t) > 0\}.$$

Pour l'espace vectoriel normé $(E; \|\cdot\|_\infty)$, montrer que A est un ouvert et déterminer l'adhérence de A .

Exercice 2, 9 pts. :

1. Pour
- $n \in \mathbb{N}$
- , on a

$$N(P_n - X^2) = N(-X^n) = N(X^n) = \int_0^1 |t|^n dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

qui tend vers 0, quand n tend vers l'infini. Donc la suite $(P_n)_n$ converge vers le polynôme X^2 pour la norme N .

2 pts.

2. Pour
- $n \in \mathbb{N}$
- , on a

$$\begin{aligned} N(Q_n - X) &= N(-\sqrt{n}(X-1)^n) = \sqrt{n} \int_0^1 (1-t)^n dt \\ &= \frac{\sqrt{n}}{n+1} [-(1-t)^{n+1}]_0^1 = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+1/n} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc la suite $(Q_n)_n$ converge vers le polynôme X pour la norme N .

3 pts.

3. On a, pour
- $n \in \mathbb{N}$
- ,

$$\|R_n\|_1 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \longrightarrow \exp(1),$$

quand n tend vers l'infini, par définition de l'exponentielle.

1 pt.

Supposons que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $R \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. Donc R s'écrit

$$R = \sum_{k=0}^d r_k X^k.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n > d$, on a,

$$\|R_n - R\|_1 = \sum_{k=0}^d \left| \frac{1}{k!} - r_k \right| + \sum_{k=d+1}^n \frac{1}{k!} \geq \frac{1}{(d+1)!}.$$

D'après l'hypothèse, on peut passer à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans les inégalités précédentes et on obtient $0 \geq 1/((d+1)!)$. Contradiction car $1/((d+1)!) > 0$. Donc la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas pour la norme $\|\cdot\|_1$.

3 pts.

Exercice 3, 6 pts. :

Soit $g \in A$. Comme f_0 est continue sur le compact $[0; 1]$, elle atteint ses bornes (cf. L1) donc il existe $t_0 \in [0; 1]$ tel que

$$\inf_{t \in [0; 1]} g(t) = g(t_0)$$

et $g(t_0) > 0$ car $g \in A$. Soit $r := g(t_0) > 0$. Soit $f \in B(g; r)$. Pour $t \in [0; 1]$, on a

$$r \leq g(t) = g(t) - f(t) + f(t) \leq |g(t) - f(t)| + f(t) \leq f(t) + \sup_{s \in [0; 1]} |g(s) - f(s)|$$

$$r \leq f(t) + \|f - g\|_\infty < f(t) + r$$

puisque $f \in B(g; r)$ donc $\|f - g\|_\infty < r$. Par simplification par r , on en déduit que $f(t) > 0$. Ceci étant vrai pour tout $t \in [0; 1]$, $f \in A$. Ceci étant vrai pour tout $f \in B(g; r)$, $B(g; r) \subset A$. Ceci étant vrai pour tout $g \in A$, A est un ouvert (cf. cours).

3 pts.

Soit

$$B := \{f \in E; \forall t \in [0; 1], f(t) \geq 0\}.$$

On montre que $\overline{A} = B$, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $g \in B$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $t \in [0; 1]$, $f_n(t) = g(t) + 1/(n+1)$. La fonction f_n est continue comme somme de fonctions continues. De plus, pour $t \in [0; 1]$, on a, comme $g \in B$, $f_n(t) = g(t) + 1/(n+1) \geq 1/(n+1) > 0$. Donc $f_n \in A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f_n - g\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f_n(t) - g(t)| = \sup_{t \in [0; 1]} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Par le théorème des gendarmes, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers g pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Donc g est limite, pour norme $\|\cdot\|_\infty$, d'une suite d'éléments de A donc $g \in \overline{A}$, par le cours. Ceci étant vrai pour tout $g \in B$, $B \subset \overline{A}$.

Soit $g \in \overline{A} (\subset E)$. Par le cours, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers g pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $t \in [0; 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, puisque $g_n \in A$,

$$0 < g_n(t) = g_n(t) - g(t) + g(t) \leq \sup_{s \in [0; 1]} |g_n(s) - g(s)| + g(t) = \|g_n - g\|_\infty + g(t).$$

Comme $\|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0$, on peut passer à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans les inégalités précédentes et on obtient $0 \leq g(t)$. Ceci étant vrai pour tout $t \in [0; 1]$, $g \in B$. Ceci étant vrai pour tout $g \in \overline{A}$, $\overline{A} \subset B$.

On a bien montré que $\overline{A} = B$.

3 pts.