Ex. 28

a- On a

$$N(id) = \int_{-1/2}^{1/2} |t|\,dt \underset{|\cdot|\text{ paire}}{=} 2\int_0^{1/2} |t|\,dt = 2\int_0^{1/2} t\,dt = \left[t^2\right]_0^{1/2} = \frac{1}{4}$$

b- (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = n$ donc $f_n(0) \longrightarrow +\infty$ ($q<1$). Comme $0 \in [-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$ et $(f_n(0))_n$ ne converge pas, $(f_n)_n$ ne converge pas simplement sur $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$.

(2). Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$N(f_n) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{n}{1+n^4t^2}\,dt \underset{\text{parité}}{=} \frac{2}{n}\int_0^{1/2} \frac{n^2}{1+(n^2t)^2}\,dt = \frac{2}{n}\int_0^{n^2/2} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}\ \underbrace{\mathrm{Arctan}(\overset{\to+\infty}{n^2/2})}_{\to \pi/2} \quad \text{car } \lim_{+\infty} \mathrm{Arctan} = \frac{\pi}{2}$$

donc $N(f_n) \longrightarrow 0$ par produit.

On a montré que $(f_n)_n$ converge vers la fonction nulle pour N.

c- (1) Soit $x \in [-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$. D'après les prop. des suites géométriques, et le fait que $x \neq 1$,

$$g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-x}$$

car $|x| \leq \frac{1}{2} < 1$. Donc $(g_n)_n$ cv. simple. sur $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$ vers la fonct. $g : [-\frac{1}{2};\frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$N(g_n - g) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1-t^{n+1}}{1-t} - \frac{1}{1-t} \right| dt$$

car $1-t>0$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \frac{|t|^{n+1}}{1-t}\, dt \leq \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{1-t}$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc, par le Th. des gendarmes, $N(g_n - g) \to 0$

c'est-à-dire $g_n \to g$ pour N.

Ex. 29

a. Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, on a

$$|\langle x ; y \rangle| \leq \left(\sum_{j=1}^m x_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^m y_j^2 \right)^{1/2}.$$

b. On a

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj} = \left\langle \begin{pmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{im} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{mj} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

3

Donc, par a.,

$$\|AB\|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \left((AB)_{ij}\right)^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} B_{\ell j}^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2\right) \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} B_{\ell j}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2 \, \|B\|^2$$

$$= \|A\|^2 \|B\|^2.$$

Comme $\|.\|$ est positive et $\sqrt{.}$ $\nearrow$, on obtient

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

c. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(k) = \left(\|A^k\| \leq \|A\|^k \|I\|\right)$.

matrice identité

Comme $\|A^0\| = \|I\| = \|A\|^0 \|I\|$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supp. $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un $k \in \mathbb{N}$. On a, par b. et l'hyp. de réc.,

$$\|A^{k+1}\| = \|A^k A\| \leq \|A^k\| \, \|A\| \leq \|A\|^k \|I\| \, \|A\| = \|A\|^{k+1} \|I\|.$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. Par le th. de réc., $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a, d'après $\mathcal{P}(k)$,

$$\|U_k\| \leq \|I\| \, \|A\|^k. \quad (*)$$

Or $\|A\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 4 \times \frac{1}{4} = 1$ donc

$0 \leq \|A\| < 1$. D'où $(\|A\|^k)_k \to 0$ (cf. L1)

et, par $(*)$, $u_k \to 0$ pour $\|\cdot\|$.

d. Par récu., on a

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2, \quad B^k C^\ell = C^\ell B^k. \quad (**)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par b. et $\mathcal{P}(k)$, on a

$$\|B^k C^k - PQ\| = \|(B^k - P)C^k + P(C^k - Q)\|$$

$$\leq \underbrace{\|B^k - P\|}_{\to 0 \text{ par hyp.}} \underbrace{\|C^k\|}_{\to \|Q\| \text{ conti. de } \|\cdot\|} + \|P\| \underbrace{\|C^k - Q\|}_{\to 0 \text{ par hyp.}} \longrightarrow 0.$$

Par le Th. des gendarmes, $B^k C^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} PQ$.

En échangeant les rôles de (B^k) et (C^k), on obtient par la m. preuve : $C^k B^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} QP$.

Or, pour tout k, on a, d'après $(**)$,

$$B^k C^k = C^k B^k$$

donc

$$QP = \lim C^k B^k = \lim B^k C^k = PQ.$$

Preuve de $(**)$: Pour $k \in \mathbb{N}$, soit

$$\mathcal{Q}(k) = \left(\forall (p,q) \in (\mathbb{N} \cap [0,k])^2,\ B^p C^q = C^q B^p \right).$$

Comme $B^0C^0 = I = C^0B^0$, $Q(0)$ est vraie. D'après l'hyp. sur B et C,

$B^1C^1 = BC = CB = C^1B^1$,

$B^0C^1 = C = C^1B^0$, $B^1C^0 = B = C^0B^1$ et $Q(0)$ est vraie donc $Q(1)$ est vraie.

Supp. $Q(k)$ vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour $(p;q) \in (\mathbb{N} \cap [0;k])^2$, on a $B^pC^q = C^qB^p$ par hyp. de récu. Pour $p \in \mathbb{N} \cap [0;k]$, on a

$$B^{k+1}C^p = B\,B^kC^p = B\,C^pB^k = C^p\,B\,B^k = C^pB^{k+1}$$

d'après $Q(k)$ car $k \geq 1$. On a aussi

$$B^pC^{k+1} = B^pC^kC = C^kB^pC = C^kCB^p = C^{k+1}B^p.$$

Enfin, on a, toujours grâce à $Q(k)$,

$$B^{k+1}C^{k+1} = B\,B^kC^kC = BC^kB^kC = C^kBCB^k$$
$$\underset{\text{hyp. sur } B \text{ et } C}{=} C^kCBB^k = C^{k+1}B^{k+1}.$$

Donc $Q(k+1)$ est vraie. Par le Th. de récu., $Q(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Ex. 39. Soit $A \in E$ et $H \in E$. On a

$$f(A+H) - f(A) = (A+H)(A+H) - A^2 = A^2 + AH + HA + H^2 - A^2$$

donc

$$\|f(A+H)-f(A)\| = \|AH+HA+H^2\|$$ cf. ex. 29

$$\leq \|AH\|+\|HA\|+\|H^2\| \leq 2\|A\|\,\|H\|+\|H\|^2$$

Comme $\|\cdot\|$ est lipschitzienne, elle est conti. (cf. ex. 36) donc $\lim_{H\to 0}\|H\| = 0$.

Soit $\varepsilon>0$. On pose $\delta = \min\left(1 ; \frac{\varepsilon}{2\|A\|+1}\right)>0$.
Soit $H\in E$ avec $\|H\|<\delta$. On a

$$\|f(A+H)-f(A)\| \leq (2\|A\|+\|H\|)\|H\| \leq (2\|A\|+1)\|H\|$$

$$< (2\|A\|+1)\,\delta \leq \varepsilon .$$

On a montré que f est conti. en A.

Ex. 46.

a. Soit K un compact et F un fermé de $(E ; N)$. Soit $u : \mathbb{N}\to K\cap F$ une suite. Comme u est une suite d'élé. de K et K est compact, elle admet une sous-suite v qui converge vers un

$l \in K$. Comme u est à val. dans F, v l'est aussi. Comme v converge et F est fermé, $l \in F$ par C. Seqs.

Donc u admet une s. suite qui converge vers un élé. de $K \cap F$. Par déf., $K \cap F$ est compact.

b. Soit K_1, K_2 deux compacts de $(E;N)$. Soit $u : \mathbb{N} \to K_1 \cup K_2$ une suite. Au moins l'un des deux ensembles

$\{n \in \mathbb{N} ; u_n \in K_1\}$ et $\{n \in \mathbb{N} ; u_n \in K_2\}$

est infini. Soit $j \in \{1;2\}$ t.q.

$T := \{n \in \mathbb{N} ; u_n \in K_j\}$ est infini.

On range les élé. de T dans l'ordre croissant des indices. T est alors l'image d'une s. suite v de u.

Comme K_j est compact, et v est une suite d'élé. de K_j, il existe une s. suite w de v

et $\ell \in K_j$ tq. $w \longrightarrow \ell$.

Comme w est aussi une s. suite de u, u admet une s. suite qui converge vers un élé. de K_j, soit un élé. de $K_1 \cup K_2$. Donc $K_1 \cup K_2$ est compact.