Ex. 42.

On a $A \subset [0;1]$. $(*)$.

Soit $u : \mathbb{N} \to A$ une suite,

1er cas : la prop. suivante est vraie :

$\exists a \in A ; \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \cap [N;+\infty[; u_n = a$.
On fixe un tel $a \in A$. $(**)$

On construit une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} = a . \quad (***)$$

Une fois cela fait, $u \circ \varphi$ est une s. suite de u et c'est une suite constante égale à a donc elle converge vers $a \in A$.

Construction de φ : Par $(**)$ avec $N = 0$,

$D_0 = \{ n \in \mathbb{N} ; u_n = a \} \neq \emptyset$.

Soit $\varphi(0) = \min D_0$. On a $u_{\varphi(0)} = a$.

Supposons construits, pour $p \in \mathbb{N}$,

$\varphi(0) < \dots < \varphi(p)$

t_q.

$\forall j \in [0;p] \cap \mathbb{N},\ u_{\varphi(j)} = a$.

D'après (**) avec $N = \varphi(p) + 1$,

$D_p := \{ n \in \mathbb{N} ;\ n \geq \varphi(p)+1 \text{ et } u_n = a \}$

est non vide. Soit $\varphi(p+1) = \min D_p$.

On a $u_{\varphi(p+1)} = a$ et $\varphi(p+1) > \varphi(p)$.

Par l'hyp. de récu., on a $\varphi(0) < \dots < \varphi(p) < \varphi(p+1)$

et, pour $j \in \mathbb{N} \cap [0;p]$, $u_{\varphi(j)} = a$.

On a vérifié la prop. au rang $p+1$.

Par le Th. de récu., on a construit l'extractrice

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaisant (***).

<u>2è cas</u> : la négation de la prop. (**)

est vraie c'est-à-dire

$\forall a \in A, \exists N_a \in \mathbb{N} ;\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [N_a ; +\infty[,\ u_n \neq a$.

(****)

On construit une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

vérifiant

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n+1} \quad (\ast\ast\ast\ast\ast)$ **3**

Une fois cela fait, $u \circ \varphi$ est une s.suite de u vérifiant, d'après $(\ast)$ et $(\ast\ast\ast\ast\ast)$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{\varphi(n)} < \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim \frac{1}{n+1} = 0$, $u \circ \varphi \longrightarrow 0 \in A$ par le Th. des gendarmes.

Construction de φ : Par $(\ast\ast\ast\ast)$ avec $a = 1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tq.

$$n \geq N_1 \Longrightarrow u_n \neq 1$$

et, d'après $(\ast)$,

$$n \geq N_1 \Longrightarrow u_n < 1.$$

Soit $\varphi(0) = N_1$. On a $u_{\varphi(0)} < 1 = \frac{1}{0+1}$.

Supposons construits, pour un $p \in \mathbb{N}$, $\varphi(0) < \dots < \varphi(p)$ tq.

$$\forall j \in [0;p] \cap \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(j)} < \frac{1}{j+1}.$$

D'après $(\ast\ast\ast\ast)$ avec $a = 0$ et avec $a = 1/(j+1)$ pour $0 \leq j \leq p+1$, il existe $N_\infty \in \mathbb{N}, N_j \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq N_\infty \Rightarrow u_n \neq 0$$

$$n \geq N_j \Rightarrow u_n \neq \frac{1}{j+1}$$

Donc, pour $n \geq \max \{ N_\infty, \max_{0 \leq j \leq p+1} N_j \} =: M$,

on a

$$u_n \notin \{0\} \cup \{ \frac{1}{j+1}, 0 \leq j \leq p+1 \}$$

donc

$$0 < u_n < \frac{1}{(p+1)+1}.$$

Soit $\varphi(p+1) = \min \{ n \in \mathbb{N}, n > \max(M, \varphi(p)) \}$

On a $\varphi(p+1) > \varphi(p)$ et

$$0 < u_{\varphi(p+1)} < \frac{1}{(p+1)+1}.$$

Par l'hyp. de récu., on a, pour $0 \leq j \leq p$,

$$u_{\varphi(j)} \leq \frac{1}{j+1}.$$

On a montré la prop. au rang $p+1$

Par le th. de récu., on a construit l'extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaisant $(\ast\ast\ast)$.