CHAPTER 2

FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE SÉRIE ENTIÈRE.

Les seuls exemples de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables qu'on a vus jusqu'ici sont ceux des fonctions polynômes et des quotients de fonctions polynômes. Afin d'enrichir cette "collection" de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables l'étape naturelle suivante est d'essayer les polynômes de "degré infini", autrement dit les fonctions définies par des séries entières.

2.1 Séries entières.

Définition 2.1. *On appelle série entière toute série de fonctions de la variable complexe z de la forme $\sum a_n z^n$, où $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

Proposition 2.1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On pose*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &:= \left\{r \in \mathbb{R}^+ \,;\ \forall\, r' \in [0; r[\,,\ \textstyle\sum a_n z^n \text{ converge normalement sur } D(0; r']\right\},\\ \mathcal{E}_2 &:= \left\{r \in \mathbb{R}^+ \,;\ (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\right\},\end{aligned}$$

$R_1 = \sup \mathcal{E}_1$ et $R_2 = \sup \mathcal{E}_2$. Alors, avec la convention $[0; R] = \mathbb{R}^+$, si $R = +\infty$, $\mathcal{E}_1$ est l'intervalle $[0; R_1]$ de $\mathbb{R}$, $\mathcal{E}_2$ contient l'intervalle $[0; R_2[$ et $R_1 = R_2$.

Définition 2.2. *On appelle la quantité $R := R_1 = R_2$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, noté $RC(\sum a_n z^n)$. Avec la convention $D(0; R[= \mathbb{C}$, si $R = +\infty$, le disque ouvert $D(0; R[$ est appelé disque de convergence de la série entière.*

Corollaire 2.1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.*

1. *Si la série $\sum a_n z^n$ converge pour un $z \in \mathbb{C}$ alors $R \geq |z|$.*
2. *Si la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée pour $z \in \mathbb{C}^*$ alors $R \leq |z|$.*
3. *Si la série $\sum a_n z^n$ diverge pour un $z \in \mathbb{C}$ alors $R \leq |z|$.*
4. *Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, donc converge.*

5. *Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| > R$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement, c'est-à-dire que le terme général ne tend pas vers 0.*

6. *Soit K un compact inclus dans le disque de convergence, i.e. tel que $K \subset D(0;R[$. Alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur K, i. e.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{z\in K} \left|a_n z^n\right| \;<\; +\infty\,.$$

Remarque 2.1. *Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$. Les points 4 et 5 du corollaire 2.1 montrent que la série ne peut converger que pour $|z| \leq R$ et qu'elle converge si $|z| < R$. Cela justifie la terminologie de rayon de convergence.*

Démonstration de la proposition 2.1. Tout d'abord, on voit que 0 appartient à $\mathcal{E}_1$ et à $\mathcal{E}_2$. En particulier, les bornes supérieures considérées sont bien définies.
Cas où $R_1 = 0$. On a $[0;R_1] = \{0\} \subset \mathcal{E}_1$. Comme $R_1 = 0$, $\mathcal{E}_1$ ne peut contenir un nombre strictement positif donc $\mathcal{E}_1 \subset \{0\}$. D'où $[0;R_1] = \{0\} = \mathcal{E}_1$.
Cas où $R_1 > 0$. Soit $r_1 \in \mathcal{E}_1$ avec $r_1 > 0$ et $r_2 \in]0;r_1]$. Comme tout réel $r' \in [0;r_2[$ vérifie $r' \in [0;r_1[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0;r']$, puisque $r_1 \in \mathcal{E}_1$. Cela montre que $r_2 \in \mathcal{E}_1$ et donc que $]0;r_1] \subset \mathcal{E}_1$. Comme $0 \in \mathcal{E}_1$, on a $[0;r_1] \subset \mathcal{E}_1$.
Cas où $R_1 = +\infty$. Par la propriété séquentielle de la borne supérieure R_1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $r_n \in (]n;+\infty[\cap\mathcal{E}_1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après l'argument précédent, $[0;n] \subset [0;r_n] \subset \mathcal{E}_1$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[0;+\infty[\subset \mathcal{E}_1$. D'où $\mathcal{E}_1 = [0;+\infty[= \mathbb{R}^+$.
Cas où $0 < R_1 < +\infty$. Soit $r' \in [0;R_1[$. Par la définition de la borne supérieure R_1, il existe $r_1 \in (]r';R_1[\cap\mathcal{E}_1)$. Comme $r_1 \in \mathcal{E}_1$ et $r' < r_1$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0;r']$. On a montré que $R_1 \in \mathcal{E}_1$. Par l'argument précédent, $[0;R_1] \subset \mathcal{E}_1$. Par définition de la borne supérieure R_1, on a $\mathcal{E}_1 \subset [0;R_1]$ donc $\mathcal{E}_1 = [0;R_1]$.
Cas où $R_2 = 0$. On a $[0;R_2[= \emptyset \subset \mathcal{E}_2$.
Cas où $R_2 > 0$. Soit $r \in [0;R_2[$. Par définition de la borne supérieure R_2, il existe un $r_2 \in (]r;+\infty[\cap\mathcal{E}_2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n r^n| = |a_n r_2^n| \cdot |r/r_2|^n \leq |a_n r_2^n| \leq \sup|a_p r_2^p| < +\infty$, puisque $r_2 \in \mathcal{E}_2$. Donc $(a_n r^n)_n$ est bornée et $r \in \mathcal{E}_2$. Donc $[0;R_2[\subset \mathcal{E}_2$.
Il reste à montrer que $R_1 = R_2$.
Cas où $R_2 = 0$. Supposons qu'on ait un $r > 0$ tel que $r \in \mathcal{E}_1$. Pour $r' \in]0;r[$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0;r']$. En particulier, $\sum a_n (r')^n$ converge absolument donc converge. Le terme général $a_n(r')^n$ tend donc vers 0 et la suite $(a_n(r')^n)_n$ est forcément bornée. D'où $r' \in \mathcal{E}_2$. Contradiction car $r' > 0$ et $R_2 = \sup\mathcal{E}_2 = 0$. On a montré que $\mathcal{E}_1 = \{0\}$ donc que $R_1 = 0 = R_2$.
Cas où $R_2 > 0$. Soit $r \in \mathcal{E}_2$ avec $r > 0$. Soit $r' \in [0;r[$. Soit $z \in D(0;r']$. Pour tout n, on a $|a_n z^n| = |a_n r^n|(|z|/r)^n \leq |a_n r^n|(r'/r)^n$. Donc, pour $N \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{N} \sup_{z\in D(0;r']} \left|a_n z^n\right| \;\leq\; \sum_{n=0}^{N} \left|a_n r^n\right| \cdot \left(\frac{r'}{r}\right)^n \;\leq\; \left(\sup_{p\in\mathbb{N}} |a_p r^p|\right) \cdot \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{r'}{r}\right)^n .$$

Comme $0 < r'/r < 1$, la série géométrique de raison r'/r converge donc la suite de ses sommes partielles est bornée. Comme $r \in \mathcal{E}_2$, $\sup_p |a_p r^p| < +\infty$. Donc, par les inégalités précédentes, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0;r']$. D'où $r \in \mathcal{E}_1$. On a montré que $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1$ donc $R_1 \geq R_2 > 0$.

Prenons $r_2 \in [0; R_1[$ et $r \in]r_2; R_1[$. Comme $[0; R_1[\subset \mathcal{E}_1$, $r \in \mathcal{E}_1$. Par définition de $\mathcal{E}_1$ et par le fait que $r_2 < r$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0; r_2]$. En particulier, la série $\sum a_n r_2^n$ converge absolument donc converge. Son terme général tend vers 0 donc la suite $(a_n r_2^n)_n$ est bornée. D'où $r_2 \in \mathcal{E}_2$. On a montré que $[0; R_1[\subset \mathcal{E}_2$ donc $R_2 \geq R_1$.
Conclusion : $R_1 = R_2$. □

Démonstration du corollaire 2.1.

1. On suppose que $\sum a_n z^n$ pour un $z \in \mathbb{C}$. Le terme général de la série tend donc vers 0 ce qui implique que la suite $(a_n z^n)_n$ est bornée. D'où $|z| \in \mathcal{E}_2$. Par la proposition 2.1, $R \geq |z|$.

2. On suppose que la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée pour $z \in \mathbb{C}^*$. Donc $|z| \notin \mathcal{E}_2$. Comme $[0; R[\subset \mathcal{E}_2$, $|z| \notin [0; R[$ donc $|z| \geq R$.

3. On suppose que $\sum a_n w^n$ diverge pour un $w \in \mathbb{C}$. Si l'on avait $|w| < R = \sup \mathcal{E}_1$ alors il existerait $r > |w|$ tel que $r \in \mathcal{E}_1$. On aurait alors la convergence normale de $\sum a_n z^n$ sur $D(0; |w|]$ donc, en particulier, la convergence absolue et donc la convergence de $\sum a_n w^n$. Contradiction. Donc $|w| \geq R$.

4. Soit $w \in \mathbb{C}$ avec $|w| < R = \sup \mathcal{E}_1$. Donc il existe $r \in \mathcal{E}_1$, tel que $r > |w|$, et la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0; |w|]$ donc, en particulier, $\sum a_n w^n$ converge absolument.

5. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R = \sup \mathcal{E}_2$. On a alors $|z| \notin \mathcal{E}_2$ donc la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée. Elle ne peut donc pas converger vers 0.

6. Comme la fonction module est continue, $\sup_K |\cdot|$ est finie et est atteinte dans K. Il existe donc $z_0 \in K$ tel que $\sup_K |\cdot| = |z_0|$. En particulier, $K \subset D(0; |z_0|]$. Pour tout n, on a donc
$$\sup_{z \in K} \left| a_n z^n \right| \leq \sup_{z \in D(0; |z_0|]} \left| a_n z^n \right|. \tag{2.1}$$
Comme $K \subset D(0; R[$ et $z_0 \in K$, on a $|z_0| < R$. Comme $R \in \mathcal{E}_1$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0; |z_0|]$, et, par (2.1), sur K. □

Pour déterminer dans la pratique le rayon de convergence d'une série entière, on pourra utiliser le corollaire 2.1 mais aussi les trois résultats suivants, qui sont basés sur les règles de D'Alembert et Cauchy pour les séries, vues en L2.

Proposition 2.2 (Règle de D'Alembert). *On considère la série entière $\sum a_n z^n$ et on suppose que $a_n \neq 0$, pour n assez grand. Si $\lim_{n \to \infty} |a_{n+1}/a_n| = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = 1/\ell$, avec la convention $R = 0$ si $\ell = +\infty$ et $R = +\infty$ si $\ell = 0$.*

Proposition 2.3 (Règle de Cauchy). *On considère la série entière $\sum a_n z^n$. Si $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = 1/\ell$, avec la convention $R = 0$ si $\ell = +\infty$ et $R = +\infty$ si $\ell = 0$.*

Remarque 2.2. *Une variante de la règle de Cauchy donne la formule de Cauchy-Hadamard suivante :*

$$R \;=\; \frac{1}{\limsup\ \sqrt[n]{|a_n|}} \ ,$$

toujours avec la convention $R = 0$ si la limite supérieure est $+\infty$ et $R = +\infty$ si la limite supérieure est 0. On **admet** *ce résultat.*

Démonstration des propositions 2.2 et 2.3. On suppose que a_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang et que $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a, pour n assez grand,

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \;=\; \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \times |z| \ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ \ell|z| \ ,$$

avec la convention $\ell|z| = +\infty$, si $\ell = +\infty$. D'après la règle de D'Alembert pour les séries numériques, $\sum a_n z^n$ converge pour les $z \neq 0$ tels que $\ell|z| < 1$ (aussi pour $z = 0$) et diverge pour les $z \neq 0$ tel que $\ell|z| > 1$.

Cas où $\ell = +\infty$. La série diverge pour $z \neq 0$ donc, par le corollaire 2.1, $0 \leq R \leq |z|$, pour tout $z \neq 0$. En prenant la limite $z \to 0$ dans les inégalités précédentes, on obtient $R = 0$ qui est bien $1/\ell$, d'après la convention.

Cas où $\ell = 0$. La série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ donc, par le corollaire 2.1, $R = +\infty$ qui est bien $1/\ell$, d'après la convention.

Cas où $0 < \ell < +\infty$. La série converge pour tout z tel que $|z| < (1/\ell)$. Par le corollaire 2.1, $R \geq |z|$, pour tous ces z, donc $R \geq \sup\,[0; 1/\ell[$ soit $R \geq 1/\ell$. La série diverge pour tout les $z \in \mathbb{C}$ tels que $\ell|z| > 1$ donc, par le corollaire 2.1, $R \leq |z|$, pour tous ces z, d'où $R \leq \inf\,]1/\ell\,; +\infty[$ soit $R \leq 1/\ell$. Conclusion : $R = 1/\ell$.

Passons à la règle de Cauchy. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} \;=\; |z| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} \ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ \ell|z| \ ,$$

avec la convention $\ell|z| = +\infty$, lorsque $\ell = +\infty$. D'après la règle de Cauchy pour les séries numériques, $\sum a_n z^n$ converge pour les z tels que $\ell|z| < 1$ et diverge pour tous les z tels que $\ell|z| > 1$. On se retrouve dans la même situation qu'après l'application de la règle de D'Alembert donc l'argument précédent donne encore $R = 1/\ell$. □

Exemple 2.1. *En appliquant la règle de D'Alembert de la proposition 2.2, on vérifie que les séries entières $\sum z^n$, $\sum z^n/n^2$ et $\sum z^n/n$ ont toutes les trois 1 pour rayon de convergence.*
Il a été montré en L1 que la série géométrique $\sum z^n$ diverge pour tout $z \in C(0;1)$.
Comme la série numérique $\sum 1/n^2$ converge, la série entière $\sum z^n/n^2$ converge normalement sur $D(0;1]$. En particulier, elle converge absolument donc converge pour tout $z \in C(0;1)$.
On peut montrer que la série $\sum z^n/n$ converge pour tout $z \in C(0;1)\setminus\{1\}$ mais qu'elle diverge pour $z = 1$.
Ceci explique pourquoi les résultats précédents sont muets sur l'éventuelle convergence de la série entière sur le cercle de convergence $C(0;R)$.

Les propriétés générales suivantes s'intéressent à la somme et au produit de séries entières.

Proposition 2.4. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Soit f (resp. g) la somme de $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum b_n z^n$)*

sur $D(0;R_a[$ (resp. $D(0;R_b[$). Alors le rayon de convergence R de $\sum(a_n+\lambda b_n)z^n$ vérifie $R\geq\min\{R_a,R_b\}$ et, si $R_a\neq R_b$, alors $R=\min\{R_a;R_b\}$. Sur $D(0;\min\{R_a;R_b\}[$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+\lambda b_n)z^n \;=\; f(z)+\lambda g(z)\,. \tag{2.2}$$

Démonstration. Prenons $z\in\mathbb{C}$ vérifiant $|z|<\min\{R_a,R_b\}$. Par le corollaire 2.1, les séries $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ convergent donc, d'après les opérations sur les limites de suites, la série de terme général $(a_n+\lambda b_n)z^n=a_nz^n+\lambda b_nz^n$ converge et on a (2.2). Cela prouve, par le corollaire 2.1, que $R\geq|z|$. Comme c'est vrai pour tout $|z|<\min\{R_a;R_b\}$, on en déduit que $R\geq\sup[0;\min\{R_a;R_b\}[=\min\{R_a;R_b\}$.
Supposons $R_a\neq R_b$.
Cas où $R_a<R_b$. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $R_a<|z|<R_b$. Par le corollaire 2.1, la série $\sum a_nz^n$ diverge tandis que $\sum b_nz^n$ converge. Si $\sum(a_n+\lambda b_n)z^n$ convergeait alors, par différence et produit, $\sum a_nz^n=\sum(a_n+\lambda b_n)z^n-\lambda\sum b_nz^n$ convergerait. Contradiction. Donc la série entière$\sum(a_n+\lambda b_n)z^n$ diverge et, par le corollaire 2.1, $R\leq|z|$. Donc $R\leq\inf]R_a;R_b[=R_a=\min\{R_a;R_b\}$.
Cas où $R_a>R_b$. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $R_b<|z|<R_a$. Par le corollaire 2.1, la série $\sum b_nz^n$ diverge tandis que $\sum a_nz^n$ converge. Si $\sum(a_n+\lambda b_n)z^n$ convergeait alors, par différence et quotient, $\sum b_nz^n=(\sum(a_n+\lambda b_n)z^n-\sum a_nz^n)/\lambda$ convergerait. Contradiction. Donc la série entière$\sum(a_n+\lambda b_n)z^n$ diverge et, par le corollaire 2.1, $R\leq|z|$. Donc $R\leq\inf]R_b;R_a[=R_b=\min\{R_a;R_b\}$. □

Remarque 2.3. *Dans le cadre de la proposition 2.4, on a :*

1. *Lorsque $\lambda=0$, la série entière $\sum(a_n+\lambda b_n)z^n$ est égale à $\sum a_nz^n$ donc son rayon de convergence est R_a.*

2. *Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=b_n=1$ et $\lambda=-1$, alors $R_a=R_b=1$ et, comme $a_n-b_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $R=+\infty$.*

3. *Si $|z|>R_a$, la formule (2.2) n'a pas de sens, même si $|z|<R$, car $f(z)$ n'est pas défini dans ce cas.*

Afin d'étudier le produit de séries entières on aura besoin du résultat suivant.

Proposition 2.5. *Soit $(\alpha_n)_n,(\beta_n)_n\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que les séries $\sum\alpha_n$ et $\sum\beta_n$ soient absolument convergentes. Alors la série de terme général*

$$\gamma_n \;:=\; \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}$$

est absolument convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\right). \tag{2.3}$$

La série $\sum\gamma_n$ est appelée produit de Cauchy des séries $\sum\alpha_n$ et $\sum\beta_n$.

Remarque 2.4. *Si seulement l'une des deux séries $\sum \alpha_n$ ou $\sum \beta_n$ est absolument convergente et que l'autre est convergente mais pas absolument alors on peut montrer que $\sum \gamma_n$ est convergente (mais pas absolument) et que (2.3) reste vraie. Si, par contre, aucune des deux séries $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$ n'est supposée absolument convergente, tout en étant toutes les deux convergentes, il se peut que la série $\sum \gamma_n$ diverge.*

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant l'inégalité triangulaire puis l'inversion des sommes sur k et n,

$$\sum_{n=0}^{N} |\gamma_n| \le \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \times |\beta_{n-k}| \right) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=k}^{N} |\alpha_k| \times |\beta_{n-k}| .$$

Or, en utilisant un décalage d'indice, on a

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{n=k}^{N} |\alpha_k| \times |\beta_{n-k}| = \sum_{k=0}^{N} \left(|\alpha_k| \times \sum_{n=k}^{N} |\beta_{n-k}| \right) = \sum_{k=0}^{N} \left(|\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{N-k} |\beta_j| \right) .$$

On en déduit, en utilisant le fait que les termes sont positifs, que

$$\sum_{n=0}^{N} |\gamma_n| \le \sum_{k=0}^{N} \left(|\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{N-k} |\beta_j| \right) \le \sum_{k=0}^{N} \left(|\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j| \right) \le \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j| .$$

La suite des sommes partielles $(\sum_{0 \le n \le N} |\gamma_n|)_N$ est donc bornée. On en déduit que la série $\sum |\gamma_n|$ converge (car c'est une série à termes positifs).
On montre maintenant (2.3). Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a,

$$\begin{aligned}
\left| \left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \right) \left(\sum_{n=0}^{N} \beta_n \right) - \sum_{k=0}^{N} \gamma_n \right| &= \left| \sum_{n,m=0}^{N} \alpha_n \beta_m - \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=0}^{k} \alpha_n \beta_{k-n} \right| \\
&= \left| \sum_{n,m=0}^{N} \alpha_n \beta_m - \sum_{k=0}^{N} \sum_{\substack{0 \le n,m \le N \\ n+m=k}} \alpha_n \beta_m \right| \\
&= \left| \sum_{0 \le n,m \le N} \alpha_n \beta_m - \sum_{\substack{0 \le n,m \le N \\ n+m \le N}} \alpha_n \beta_m \right| = \left| \sum_{\substack{0 \le n,m \le N \\ n+m > N}} \alpha_n \beta_m \right| .
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que les termes sont positifs, on obtient

$$\begin{aligned}
\left| \left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \right) \left(\sum_{n=0}^{N} \beta_n \right) - \sum_{k=0}^{N} \gamma_n \right| &\le \sum_{\substack{0 \le n,m \le N \\ n+m > N}} |\alpha_n| \times |\beta_m| \\
&\le \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ n+m > N}} |\alpha_n| \times |\beta_m| = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} |\alpha_n| \times |\beta_{k-n}|.
\end{aligned}$$

Le membre de droite est le reste d'ordre N de la série de terme général

$$u_k = \sum_{n=0}^{k} |\alpha_n| \times |\beta_{k-n}| .$$

Comme les séries $\sum |\alpha_n|$ et $\sum |\beta_n|$ convergent (absolument), d'après la première partie de la preuve, la série $\sum u_k$ converge (absolument) donc son reste tend vers 0. Par le théorème des gendarmes, on obtient donc

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} \beta_n\right) - \sum_{n=0}^{N} \gamma_n = 0,$$

et, comme les trois séries $\sum \alpha_n$, $\sum \beta_n$ et $\sum \gamma_n$ convergent, cela prouve (2.3). □

Proposition 2.6. *Soit $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum b_n z^n$) une série entière de rayon de convergence R_a (resp. R_b) et de somme f (resp. g). Pour $n \in \mathbb{N}$, soit*

$$c_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\,.$$

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n z^n$ vérifie $R \geq \min\{R_a; R_b\}$ et on a, sur le disque $D(0; \min\{R_a; R_b\}[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \;=\; f(z) \times g(z)\,. \tag{2.4}$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. D'après le corollaire 2.1, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument donc on peut appliquer la Proposition 2.5. On en déduit que la série de terme général

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = c_n z^n$$

converge et vérifie (2.4). De plus, par le corollaire 2.1, $R \geq |z|$. Ceci étant valable pour tout $z \in D(0; \min\{R_a; R_b\}[$, on a $R \geq \sup[0; \min\{R_a; R_b\}[= \min\{R_a; R_b\}$. □

La question naturelle suivante est celle de la $\mathbb{C}$-dérivabilité des sommes de série entière.

Proposition 2.7. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors la série entière $\sum (p+1) a_{p+1} z^p$ a pour rayon de convergence R. De plus, si $R > 0$, la somme f de la série entière, qui est définie sur $D(0; R[$, par*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\,,$$

est holomorphe sur $D(0; R[$ et on a, pour tout $z \in D(0; R[$,

$$f'(z) \;=\; \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)\, a_{p+1}\, z^p \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}\,. \tag{2.5}$$

En raisonnant par récurrence, on en déduit le résultat important suivant.

Corollaire 2.2. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Sa somme f est une fonction infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0;R[$, i.e. $f \in C_h^\infty$ sur $D(0;R[$, et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $z \in D(0;R[$, on a*

$$f^{(k)}(z) \;=\; \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, z^{n-k} \tag{2.6}$$

avec

$$\frac{n!}{(n-k)!} \;=\; \prod_{p=0}^{k-1} (n-p) \;=\; n(n-1)\cdots(n-k+1)\,.$$

En particulier, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad a_n \;=\; \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,. \tag{2.7}$$

Démonstration de la proposition 2.7. Soit R' le rayon de convergence de la série entière $\sum (p+1)a_{p+1}z^p = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.
Soit $r > R$. Par la proposition 2.1, la suite $(a_n r^n)_n$ n'est pas bornée. Si la suite $(|n a_n r^{n-1}|)_{n\geq 1}$ était majorée par un $M \in \mathbb{R}^+$, on aurait, pour $n \geq 1$,

$$\left|a_n\, r^n\right| \;=\; \frac{r}{n}\left|n\, a_n\, r^{n-1}\right| \;\leq\; \frac{Mr}{n} \;\leq\; M\,r \;<\; +\infty$$

et la suite $(|a_n r^n|)_n$ serait majorée par le $\max(|a_0|; Mr)$. Contradiction. Donc $(n a_n r^{n-1})_{n\geq 1}$ n'est pas bornée et, par le corollaire 2.1, $R' \leq r$. Donc $R' \leq \inf\,]R;+\infty[= R$, d'où $R' \leq R$.
Si $R = 0$, cela prouve que $R' = 0$. On suppose désormais que $R > 0$.
Soit $r \in [0;R[$ et $r' \in]r;R[$. La suite $(n(r/r')^n)_n$ est positive et décroissante à partir du rang $1 + E(r/(r'-r))$ (où $E(a)$ désigne la partie entière du réel a) donc elle est majorée. Pour $n \geq 1$, on a

$$\left|n\, a_n\, r^{n-1}\right| \;=\; \frac{1}{r}\cdot n\left(\frac{r}{r'}\right)^n \cdot \left|a_n\,(r')^n\right| \;\leq\; \frac{1}{r}\cdot\left(\sup_{p\in\mathbb{N}} p\left(\frac{r}{r'}\right)^p\right)\cdot\left|a_n\,(r')^n\right|.$$

Comme $r' < R$, la série $\sum a_n(r')^n$ converge absolument (cf. corollaire 2.1), on a donc, par comparaison, la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\sum_{n\geq 1} n a_n r^{n-1}$.
Toujours grâce au corollaire 2.1, $R' \geq r$. On a donc $R' \geq \sup\,[0;R[= R$.
On a donc montré que $R' = R$.
En appliquant le résultat précédent à la série entière $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$, on obtient que R est aussi le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n z^{n-2}$.
On note par F la somme de la $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$. Prenons $z_0 \in D(0;R[$. On montre que f est holomorphe en z_0 de nombre $\mathbb{C}$-dérivé $F(z_0)$.
Soit $r \in]0;R-|z_0|[$. On a $D(z_0;r] \subset D(0;R[$. Pour $z \in D(z_0;r]$, soit $g(z) = f(z) - f(z_0) - (z-z_0)F(z_0)$. Pour $n \geq 1$, la fonction $[0;1] \ni t \mapsto (tz + (1-t)z_0)^n$ vaut z_0^n en 0, z^n en 1 et

est C^1 de dérivée $[0;1] \ni t \mapsto n(tz+(1-t)z_0)^{n-1}(z-z_0)$ (*) donc

$$\begin{aligned}
g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z^n - z_0^n\right) - (z - z_0)\,F(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z^n - z_0^n\right) - (z - z_0)\,F(z_0)\\
&= (z - z_0)\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n \int_0^1 \left(tz + (1-t)z_0\right)^{n-1}\mathrm{d}t - (z - z_0)\,F(z_0)\\
&= (z - z_0)\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n \left(\int_0^1 \left(tz + (1-t)z_0\right)^{n-1}\mathrm{d}t - z_0^{n-1}\right)\\
&= (z - z_0)\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n \int_0^1 \left(\left(tz + (1-t)z_0\right)^{n-1} - z_0^{n-1}\right)\mathrm{d}t\\
&= (z - z_0)^2\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n \int_0^1\int_0^1 \left(sz_t + (1-s)z_0\right)^{n-2}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

en utilisant encore la propriété (*) et en posant $z_t = tz + (1-t)z_0$.
Comme $D(z_0;r]$ est convexe, on a, pour tout $t \in [0;1]$, $z_t \in D(z_0;r]$ et $sz_t + (1-s)z_0 \in D(z_0;r]$. Donc, pour tout $n \geq 2$,

$$\sup_{z\in D(z_0;r]}\ \sup_{t\in[0;1]}\ \sup_{s\in[0;1]} \left|n\,(n-1)\,a_n\left(sz_t + (1-s)z_0\right)^{n-2}\right| \leq \sup_{w\in D(z_0;r]} \left|n\,(n-1)\,a_n\,w^{n-2}\right|. \tag{2.9}$$

Donc, pour $z \in D(z_0;r]$, on déduit de (2.8), en utilisant l'inégalité triangulaire, la continuité du module et (2.9),

$$\begin{aligned}
|g(z)| &\leq |z - z_0|^2\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,|a_n| \left|\int_0^1\int_0^1 \left(sz_t + (1-s)z_0\right)^{n-2}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leq |z - z_0|^2\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,|a_n| \int_0^1\int_0^1 \left|sz_t + (1-s)z_0\right|^{n-2}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\
&\leq |z - z_0|^2\sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1\int_0^1 \sup_{w\in D(z_0;r]}\left|n\,(n-1)\,a_n\,w^{n-2}\right|\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\
&\leq |z - z_0|^2\sum_{n=2}^{\infty} \sup_{w\in D(z_0;r]}\left|n\,(n-1)\,a_n\,w^{n-2}\right|.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Comme $r < R$ et R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n w^{n-2}$, celle-ci converge normalement sur $D(z_0;r]$ (cf. proposition 2.1). Donc (2.10) montre que $g(z) = o(|z-z_0|)$ sur $D(z_0;r]$ et que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 de nombre $\mathbb{C}$-dérivé $F(z_0)$. □

Remarque 2.5. *Par analogie avec les formules de Taylor pour une fonction réelle d'une variable réelle de classe C^∞, la série entière $\sum a_n z^n$ s'appelle la série de Taylor en 0 de f, puisque les a_n vérifient* (2.7).

Dans tout ce qu'on a fait, on a considéré des séries entières "centrées en 0". Si $z_0 \in \mathbb{C}$, on peut de façon analogue considérer des séries entières "centrées en z_0", i.e. de la forme $\sum a_n(z-z_0)^n$. En remplaçant 0 par z_0 et chaque z^n par $(z-z_0)^n$, on récupère tous les

résultats précédents de la présente partie.
En particulier, si $R > 0$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n(z - z_0)^n$ alors sa somme f est C_h^∞ sur $D(z_0; R[$ et on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad a_n \;=\; \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,. \tag{2.11}$$

On a donc une façon de retrouver les coefficients a_n à partir des $\mathbb{C}$-dérivées de f. Pour ce faire, il se trouve que l'on dispose d'un autre moyen en utilisant seulement la fonction f et des intégrales de le long d'un chemin, comme on va le voir maintenant.
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit $\sum a_n(z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note par f sa somme, qui est définie et holomorphe sur $D(z_0; R[$. En particulier, elle y est continue. Pour $r \in]0; R[$, soit $\gamma_{z_0;r} : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma_{z_0;r}(t) = z_0 + re^{it}$. Il s'agit d'un lacet de classe C^1 dont l'image est $C(z_0; r)$ (cf. corollaire 2.4). Que peut-on dire de

$$\int_{\gamma_{z_0;r}} f(w)\, \mathrm{d}w\,?$$

C'est nul ! car le chemin $\gamma_{z_0;r}$ est fermé et f admet comme primitive sur $D(0; R[$ la somme de la série entière $\sum a_n(z - z_0)^{n+1}/(n + 1)$ (cf. proposition 2.7). On peut retrouver ce résultat de la façon suivante.
Comme $r \in]0; R[$, le compact $C(z_0; r)$ est inclus dans $D(z_0; R[$ donc, par le corollaire 2.1, la série entière $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge normalement sur $C(z_0; r)$. D'après la proposition 1.18, on a donc

$$\int_{\gamma_{z_0;r}} f(w)\, \mathrm{d}w \;=\; \int_{\gamma_{z_0;r}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z_0)^n\, \mathrm{d}w \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma_{z_0;r}} (w - z_0)^n\, \mathrm{d}w\,.$$

Chaque terme de la dernière série est nul car les fonctions $w \mapsto (w - z_0)^n$ ont toutes une primitive et le chemin est fermé.
La situation serait différente si l'on avait un terme contenant $(w - z_0)^{-1}$ car

$$\int_{\gamma_{z_0;r}} (w - z_0)^{-1}\, \mathrm{d}w \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}\, rie^{it}\, \mathrm{d}t \;=\; 2i\pi\,.$$

Cela nous incite à considérer, pour $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{1+p}}\, \mathrm{d}w\,.$$

Pour pouvoir permuter l'intégrale et la série, on vérifie que la série $\sum a_n(w - z_0)^{n-1-p}$ de fonctions de w converge normalement sur $C(z_0; r)$: on a

$$\sup_{w \in C(z_0;r)} \left| a_n\, (w - z_0)^{n-1-p} \right| \;=\; |a_n|\, r^{n-1-p} \;=\; \frac{1}{r^{1+p}} \left| a_n\, r^n \right|.$$

Comme $r < R$, la série $\sum a_n r^n$ converge absolument (cf. corollaire 2.1) donc, par comparaison, on a la convergence normale sur $C(z_0; r)$ de $\sum a_n(w - z_0)^{n-1-p}$.

D'après la proposition 1.18, on a donc, en utilisant le fait que $\gamma_{z_0;r}$ est fermé et le fait que, pour $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $w \mapsto (w-z_0)^m$ admet une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$,

$$\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{1+p}}\,\mathrm{d}w \;=\; \int_{\gamma_{z_0;r}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z_0)^{n-1-p}\,\mathrm{d}w \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma_{z_0;r}} (w-z_0)^{n-1-p}\,\mathrm{d}w$$
$$= a_p \int_{\gamma_{z_0;r}} (w-z_0)^{-1}\,\mathrm{d}w + 0 \;=\; 2i\pi\, a_p\,.$$

On a montré la

Proposition 2.8. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit $\sum a_n(z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $r \in]0;R[$, soit $\gamma_{z_0;r} : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma_{z_0;r}(t) = z_0 + re^{it}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction*

$$]0;R[\ni r \;\mapsto\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\big(z_0 + re^{it}\big)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t \tag{2.12}$$

est constante égale à a_n.

Dans le cadre de cette proposition 2.8, on remarque que

$$f(z_0) \;=\; a_0 \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z_0}\,\mathrm{d}w\,.$$

On peut donc retrouver la valeur de f au centre du disque $D(z_0;R[$ en intégrant $w \mapsto f(w)/(w-z_0)$ sur le long du bord de n'importe quel disque $D(z_0;r[$, pour $r \in]0;R[$ (formule de la moyenne). Peut-on retrouver d'autres valeurs ? Oui, comme le montre la

Proposition 2.9. *Dans le cadre de la proposition 2.8, soit $z \in D(z_0;R[$. Alors, pour tout $r \in]|z-z_0|;R[$, on a $z \in D(z_0;r[$ et*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\big(z_0+re^{it}\big)}{z_0+re^{it}-z}\, e^{it}\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.13}$$

En particulier, si $a_0 = 1$ et $a_n = 0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors le rayon de convergence de la série entière correspondante est infini, f est constante égale à 1 sur $\mathbb{C}$ et, pour tout $r > 0$ et tout $z \in D(z_0;r[$,

$$1 \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{z_0+re^{it}-z}\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.14}$$

Enfin, pour tout $r > 0$ et tout $z \in (\mathbb{C} \setminus D(z_0;r])$, on a

$$0 \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{z_0+re^{it}-z}\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.15}$$

Démonstration. Soit $z \in D(z_0;R[$ et $r \in]|z-z_0|;R[$. On a bien $z \in D(z_0;r[$. D'après (2.12), on a

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n \;=\; \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)\,(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,. \tag{2.16}$$

Comme, pour $w \in C(z_0;r)$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{f(w)\,(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right| \leq \left(\sup_{w' \in C(z_0;r)} |f(w')| \right) \frac{|z-z_0|^n}{r^{n+1}}\,,$$

on a

$$\sup_{w \in C(z_0;r)} \left| \frac{f(w)\,(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{r} \left(\sup_{w \in C(z_0;r)} |f(w)| \right) \left(\frac{|z-z_0|}{r} \right)^n . \tag{2.17}$$

Comme $|z-z_0| < r$, la série géométrique $\sum((z-z_0)/r)^n$ converge donc la série

$$\sum \frac{f(w)\,(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

de fonctions de w converge normalement sur $C(z_0;r)$. D'après la proposition 1.18,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n \mathrm{d}w = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w\,. \end{aligned}$$

On a montré (2.13).
On suppose désormais que $a_0 = 1$ et $a_n = 0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et on montre (2.15).
Soit $r > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-z_0| > r$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{w-z} \mathrm{d}w &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{w-z_0+z_0-z} \mathrm{d}w = \frac{1}{2i\pi(z_0-z)} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2i\pi(z_0-z)} \int_{\gamma_{z_0;r}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n \mathrm{d}w\,. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{w \in C(z_0;r)} \left| \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n \right| \leq \left(\frac{r}{|z-z_0|} \right)^n .$$

Comme $r < |z-z_0|$, la série géométrique $\sum(r/(z-z_0))^n$ converge donc, par comparaison, la série $\sum(w-z_0)^n/(z-z_0)^n$ de fonctions de w converge normalement sur $C(z_0;r)$. Par la proposition 1.18, on obtient

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{w-z} \mathrm{d}w = \frac{1}{2i\pi(z_0-z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^n} \int_{\gamma_{z_0;r}} (w-z_0)^n \mathrm{d}w = 0\,,$$

puisque chaque fonction $w \mapsto (w-z_0)^n$ admet une primitive et le chemin $\gamma_{z_0;r}$ est fermé. □

2.2 La fonction exponentielle complexe.

Parmi toutes les fonctions définies par une série entière, l'une des plus importantes, si ce n'est la plus importante, est certainement la fonction exponentielle complexe.

Définition-Proposition 2.3. *La série entière*

$$s \;:=\; \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

a pour rayon de convergence $R = +\infty$. Sa somme est appelée fonction exponentielle et est notée exp*. Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $\exp(z)$ aussi par e^z.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la règle de D'Alembert. □

Définition 2.4. *Les fonctions cosinus* cos : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *et sinus* sin : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *sont définies sur $\mathbb{C}$ par*

$$\cos(z) \;=\; \frac{\exp(iz) \,+\, \exp(-iz)}{2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\,,$$

$$\sin(z) \;=\; \frac{\exp(iz) \,-\, \exp(-iz)}{2i} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,$$

respectivement. On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Remarque 2.6. *Fonctions d'une variable réelle reliées à l'exponentielle complexe.*

1. *Les restrictions à $\mathbb{R}$ des fonctions exponentielle, sinus et cosinus, sont à valeurs réelles car ce sont des sommes de séries entières à coefficients réels.*

2. *La restriction de l'exponentielle complexe à la droite $i\mathbb{R} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}(z) = 0\}$ joue un rôle particulier car, pour $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos(t) \;=\; \mathrm{Re}\big(\exp(it)\big)\,, \quad \sin(t) \;=\; \mathrm{Im}\big(\exp(it)\big)\,, \quad \exp(it) \;=\; \cos(t) \,+\, i\sin(t)\,.$$

3. *On définit les fonctions cosinus hyperbolique* ch : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *et sinus hyperbolique* sh : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *par*

$$\mathrm{ch}(z) \;=\; \frac{\exp(z) \,+\, \exp(-z)}{2}\,, \quad \mathrm{sh}(z) \;=\; \frac{\exp(z) \,-\, \exp(-z)}{2}\,,$$

respectivement. ch *et* sh *sont parfois notées* cosh *et* sinh*, respectivement. Pour $z \in \mathbb{C}$,*

$$\mathrm{ch}(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

4. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cos(z) = \mathrm{ch}(iz)$, $\sin(z) = -i\mathrm{sh}(iz)$, $\mathrm{ch}(z) = \cos(iz)$ et $\mathrm{sh}(z) = -i\sin(iz)$. Enfin,* cos *et* ch *sont paires tandis que* sin *et* sh *sont impaires.*

Dans cette partie, on va établir des propriétés de l'exponentielle complexe et retrouver de nombreuses propriétés (plus ou moins admises à l'école et en L1-L2) de l'exponentielle réelle, de cosinus et de sinus. De plus, un nombre strictement positif va apparaître. On le nommera π ("pi"), ce qui correspondra bien à la définition usuelle de π, d'après la remarque 1.12.

Théorème 2.1. *L'exponentielle complexe vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\exp(0) = 1$.

2. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.

3. *Pour tous* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

4. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$ *et* $(\exp(z))^{-1} := 1/\exp(z) = \exp(-z)$.

5. *La restriction* $\exp_{|\mathbb{R}}$ *de l'exponentielle complexe à* $\mathbb{R}$*, l'exponentielle réelle, prend des valeurs réelles strictement positives et, pour tout* $z \in \mathbb{C}$*, on a* $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$.

6. *La fonction* exp *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *(donc entière) et sa* $\mathbb{C}$*-dérivée est elle-même, c'est-à-dire, pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\exp'(z) = \exp(z)$. *Les fonctions* cos, sin, ch *et* sh *sont aussi holomorphes sur* $\mathbb{C}$ *et vérifient, pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\cos'(z) = -\sin(z)$, $\sin'(z) = \cos(z)$, $\mathrm{ch}'(z) = \mathrm{sh}(z)$ *et* $\mathrm{sh}'(z) = \mathrm{ch}(z)$.
   Ces fonctions sont de classe C_h^∞.

7. *Pour tout* $a \in \mathbb{C}$*, l'application* $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(at)$ *est de classe* C^1 *de dérivée* $\mathbb{R} \ni t \mapsto a\exp(at)$.

8. *La restriction de* exp *à* $\mathbb{R}$ *est une bijection strictement croissante de classe* C^∞ *de* $\mathbb{R}$ *sur* $]0; +\infty[$. *De plus,* $(\exp_{|\mathbb{R}})' = \exp_{|\mathbb{R}}$.

9. *L'application* $\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(it)$ *et les restrictions à* $\mathbb{R}$ *des fonctions* cos, sin, ch *et* sh *sont* C^∞ *et* $\varphi' = i\varphi$, $(\cos_{|\mathbb{R}})' = -\sin_{|\mathbb{R}}$, $(\sin_{|\mathbb{R}})' = \cos_{|\mathbb{R}}$, $(\mathrm{ch}_{|\mathbb{R}})' = \mathrm{sh}_{|\mathbb{R}}$ *et* $(\mathrm{sh}_{|\mathbb{R}})' = \mathrm{ch}_{|\mathbb{R}}$.

10. *L'application* $\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(it)$ *est à valeurs dans* $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\}$ *et est surjective. L'ensemble* $\{t \in \mathbb{R}^+\,;\ \exp(it) = i\}$ *est non vide et admet un minimum* t_0. *On définit le nombre* π *par* $\pi = 2t_0$.

11. *Pour* $(t; t') \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = \varphi(t')$ *si et seulement si* $t - t' \in 2\pi\mathbb{Z}$. *En particulier, pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, φ *est bijective de* $[\theta; \theta + 2\pi[$ *sur* $\mathcal{U}$.

12. *On a* $\exp(i\pi/2) = i$, $\exp(i\pi) = \exp(-i\pi) = -1$, $\exp(2i\pi) = 1 = \exp(0)$.

13. *La fonction* φ *est périodique de période* 2π *et il en est de même des restrictions à* $\mathbb{R}$ *des fonctions* cos *et* sin.

14. *Pour* $(z; z') \in \mathbb{C}^2$*, on a* $\exp(z) = \exp(z')$ *si et seulement si* $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

15. *La fonction* exp *est surjective de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}^*$ *et est périodique de période* $2i\pi$.

Corollaire 2.3. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$*, l'ensemble* $\mathcal{A}_z := \{t \in \mathbb{R};\ z = |z|\exp(it)\}$ *est infini et s'écrit* $\mathcal{A}_z = \{\alpha + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\}$*, pour un certain* $\alpha \in \mathbb{R}$. *De plus, pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$*, l'ensemble* $\mathcal{A}_z \cap]\theta; \theta + 2\pi]$ *a exactement un élément.*

Démonstration. Comme $z/|z| \in \mathcal{U}$, il existe, par 10, $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(i\alpha) = z/|z|$. Donc $\alpha \in \mathcal{A}_z$. Soit $\alpha' \in \mathbb{R}$. D'après 11, $\alpha' \in \mathcal{A}_z$ si et seulement $\exp(i\alpha') = z/|z| = \exp(i\alpha)$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha' - \alpha = 2k\pi$. Donc $\mathcal{A}_z = \{\alpha + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\}$, qui est bien infini.
Soit $p \in \mathbb{Z}$ la partie entière de $(\theta + 2\pi - \alpha)/(2\pi)$. On a $p \leq (\theta + 2\pi - \alpha)/(2\pi) < p + 1$ donc $2\pi p \leq \theta + 2\pi - \alpha < 2\pi p + 2\pi$ et, en additionnant $-(\theta + 2\pi + 2p\pi)$, $-\theta - 2\pi \leq -\alpha - 2p\pi < -\theta$.

D'où $\theta < \alpha + 2p\pi \leq \theta + 2\pi$ et $\mathcal{A}_z \cap]\theta;\theta+2\pi]$ contient au moins un élément.
Supposons que $\alpha_1 \in (\mathcal{A}_z \cap]\theta;\theta+2\pi])$ et $\alpha_2 \in (\mathcal{A}_z \cap]\theta;\theta+2\pi])$. D'après 11, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha_2 - \alpha_1 = 2k\pi$ et, comme $\alpha_2 \in]\theta;\theta+2\pi]$ et $-\alpha_1 \in [-\theta-2\pi;-\theta[$,

$$-2\pi \;=\theta \;+\;(-\theta\;-\;2\pi)\;<\;2k\pi\;<\;\theta+2\pi\;+\;(-\theta)\;=\;2\pi$$

donc $k = 0$ et $\alpha_2 = \alpha_1$. Donc $\mathcal{A}_z \cap]\theta;\theta+2\pi]$ est un singleton. □

À partir du corollaire 2.3, on introduit la

Définition 2.5. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On dit qu'un élément de $\mathcal{A}_z$ est un argument de z. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, l'unique élément de $\mathcal{A}_z$ qui appartient à $]\theta;\theta+2\pi]$ est noté $\mathrm{Arg}_\theta(z)$. Dans le cas $\theta = -\pi$, l'unique élément de $\mathcal{A}_z$ qui appartient à $]-\pi;\pi]$, à savoir $\mathrm{Arg}_{-\pi}(z)$, est appelé argument principal de z et noté $\mathrm{Arg}(z)$.*

Corollaire 2.4. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $\gamma_\pm : [\theta;\theta+2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{\pm it}$. Alors γ_+ et γ_- sont des lacets de classe C^1 dont l'image est le cercle $C(z_0;r)$.*

Démonstration. Par le point 7 du théorème 2.1, γ_+ et γ_- sont C^1. On a

$$(\gamma_+\;-\;z_0)/r\;=\;\varphi_{|[\theta;\theta+2\pi]}\;=\;\overline{(\gamma_-\;-\;z_0)/r}\,. \tag{2.18}$$

Par le point 11 du théorème 2.1, $\varphi(\theta) = \varphi(\theta+2\pi)$ donc, par (2.18), on a $\gamma_+(\theta) = \gamma_+(\theta+2\pi)$ et $\gamma_-(\theta) = \gamma_-(\theta+2\pi)$. Donc γ_+ et γ_- sont fermés.
Par le point 11 du théorème 2.1, la restriction de φ à $[\theta;\theta+2\pi[$ est injective donc, par (2.18) et le fait que la conjugaison $\bar{\cdot}$ est injective, les restrictions de γ_+ et γ_- à $[\theta;\theta+2\pi[$ sont injectives. Donc γ_+ et γ_- sont simples. Ce sont donc des lacets.
D'après les points 10 et 11 du théorème 2.1, on a

$$\mathcal{U} = \varphi([\theta;\theta+2\pi[) \subset \varphi([\theta;\theta+2\pi]) \subset \varphi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{U}$$

donc ces ensembles sont égaux. De plus, conjugaison $\bar{\cdot}$ est bijective de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a donc, par (2.18),

$$\begin{aligned} z \in \gamma_+\big([\theta;\theta+2\pi]\big) &\iff \exists\, t \in [\theta;\theta+2\pi]\,;\; z \;=\; \gamma_+(t) \\ &\iff \exists\, t \in [\theta;\theta+2\pi]\,; z \;=\; z_0 \;+\; r\varphi(t) \\ &\iff \exists\, u \in \mathcal{U}\,; z \;=\; z_0 \;+\; ru \\ &\iff |z\;-\;z_0| \;=\; r \iff \exists\, u \in \mathcal{U}\,; z \;=\; z_0 \;+\; r\overline{u} \\ &\iff \exists\, t \in [\theta;\theta+2\pi]\,; z \;=\; z_0 \;+\; r\overline{\varphi(t)} \\ &\iff \exists\, t \in [\theta;\theta+2\pi]\,; z \;=\; \gamma_-(t) \iff z \in \gamma_-\big([\theta;\theta+2\pi]\big)\,. \end{aligned}$$

Donc $\gamma_+([\theta;\theta+2\pi]) = \gamma_-([\theta;\theta+2\pi]) = \{z \in \mathbb{C}\,;\; |z-z_0| = r\} = C(z_0;r)$. □

La suite de cette partie est consacrée à démontrer le théorème précédent.

Démonstration du théorème 2.1. Pour $z = 0$, la suite des sommes partielles de s est constante égale à $0^0 = 1$ donc la somme de la série $\exp(0) = 1$. On a montré 1.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} \;=\; \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{z}^n}{n!}$$

et la fonction $z \mapsto \overline{z}$ est continue (cf. exemple 1.3) donc, par passage à la limite $N \to +\infty$ dans les égalités précédentes, on obtient $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$. On a montré 2.
Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$. Puisque le rayon de convergence de s est infini, les séries $\sum z_1^n/(n!)$ et $\sum z_2^n/(n!)$ convergent absolument (cf. corollaire 2.1). Donc, par la proposition 2.5 et la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\exp(z_1)\,\exp(z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z_1^k\,z_2^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,z_1^k\,z_2^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n = \exp(z_1+z_2)\,.\end{aligned}$$

On a montré 3.
Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après 1 et 3, on a $1 = \exp(0) = \exp(z-z) = \exp(z)\exp(-z)$. Nécessairement, $\exp(z) \neq 0$ et $\exp(-z) = 1/\exp(z)$. On a montré 4.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a déjà montré que $\exp(x) \in \mathbb{R}$. Par 3 et 4, $\exp(x) = (\exp(x/2))^2 > 0$. Par 1, 2 et 3, on a

$$|\exp(ix)|^2 = \overline{\exp(ix)}\,\exp(ix) = \exp(-ix)\,\exp(ix) = \exp(0) = 1\,. \tag{2.19}$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a donc, par 3, $\exp(z) = \exp(\mathrm{Re}(z))\exp(i\mathrm{Im}(z))$ et, par (2.19), $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$. On a montré 5.
Par la proposition 2.7, la fonction exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de $\mathbb{C}$-dérivée

$$\exp'(z) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(p+1)}{(p+1)!}\,z^p = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{p!} = \exp(z)\,.$$

Toujours par la proposition 2.7 (ou bien proposition 1.24), cos, sin, ch et sh sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et, par la proposition 1.24,

$$\cos'(z) = \frac{i\mathrm{e}^{iz} + (-i)\mathrm{e}^{-iz}}{2} = -\sin(z)\,,\quad \sin'(z) = \frac{i\mathrm{e}^{iz} - (-i)\mathrm{e}^{-iz}}{2i} = \cos(z)\,,$$

$$\mathrm{ch}'(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} + (-1)\mathrm{e}^{-z}}{2} = \mathrm{sh}(z) \quad\text{et}\quad \mathrm{sh}'(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} - (-1)\mathrm{e}^{-z}}{2} = \mathrm{ch}(z)\,.$$

Par le corollaire 2.2, les fonctions cos, sin, ch et sh sont C_h^∞. On a montré 6.
Pour $a \in \mathbb{C}$, l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto at$ est C^1. Comme l'exponentielle complexe est C_h^1 par 6, l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(at)$ est de classe C^1 de dérivée $\mathbb{R} \ni t \mapsto a\exp(at)$, par la proposition 1.24. On a montré 7.
D'après 7 avec $a = 1$, $\exp_{|\mathbb{R}}$ est de classe C^1 et $(\exp_{|\mathbb{R}})' = \exp_{|\mathbb{R}}$. Par récurrence, on vérifie qu'elle est de classe C^∞. Par 5, $(\exp_{|\mathbb{R}})'$ est strictement positive donc $\exp_{|\mathbb{R}}$ est strictement croissante. De plus, pour $x \geq 0$, on a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!} \geq 1 + x$$

donc, par passage à la limite $N \to \infty$, on a $\exp(x) \geq 1 + x$. Par le théorème des gendarmes pour $x \to +\infty$, exp tend vers $+\infty$ en $+\infty$. D'après 4, on en déduit que exp tend vers 0 en

$-\infty$. D'après un cours de L1, exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$. On a montré 8.
On retrouve ainsi bien la définition de la fonction exponentielle que vous avez vue en terminale (et dont vous avez jusque-là admis l'existence !).
D'après 7 pour les $a \in \{i;-i;1;-1\}$ et la proposition 1.24, φ, $\cos_{|\mathbb{R}}$, $\sin_{|\mathbb{R}}$, $\mathrm{ch}_{|\mathbb{R}}$ et $\mathrm{sh}_{|\mathbb{R}}$ sont C^1 et on a les formules de dérivées de 9. Par récurrence, on vérifie que ces fonctions sont de classe C^∞. On a montré 9.
Pour l'étude de la fonction φ (pour montrer 10), on va utiliser le

Lemme 2.1. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n\geq 2n_0}$ une suite réelle décroissante, qui tend vers 0, et $(S_n)_{n\geq 2n_0}$ la suite des sommes partielles de la série alternée $\sum_{n\geq 2n_0}(-1)^n a_n$. Alors la série converge et*

$$\forall\, p \in \big(\mathbb{N} \cap [n_0;+\infty[\big)\,, \quad S_{2p+1} \;\leq\; \sum_{n=2n_0}^{\infty}(-1)^n a_n \;\leq\; S_{2p}\,.$$

Démonstration. Voir TD. □

Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après le corollaire 2.1, la série complexe $s(z)$ converge absolument. Donc son terme général tend vers 0. En particulier, ses sous-suites

$$\left(\frac{|z|^{2n}}{(2n)!}\right)_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)_n$$

tendent aussi vers 0. De plus, pour $|z| \leq 2$, ces sous-suites sont décroissantes à partir du rang 1 et 0 respectivement. Pour $|z| \leq 2$, on peut donc appliquer le lemme 2.1 à

$$\sum_{n\geq 2}\frac{|z|^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et à} \quad \sum_{n\geq 0}\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

En particulier, on a

$$\cos(2) \;=\; 1 - \frac{2^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\, 2^{2n}}{(2n)!} \;\leq\; -1 + \sum_{n=2}^{2}\frac{(-1)^n\, 2^{2n}}{(2n)!} \;=\; -\frac{1}{3} \;<\; 0\,. \tag{2.20}$$

et, pour $t \in]0;2]$,

$$\sin(t) \;\geq\; \sum_{n=0}^{1}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; t - \frac{t^3}{6} \;=\; \frac{t}{6}\,(6 - t^2) > 0\,. \tag{2.21}$$

D'après (2.19), φ est à valeurs dans $\mathcal{U}$. En particulier, par le 2 de la remarque 2.6, on a

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\,, \quad \cos^2(t) + \sin^2(t) \;=\; 1\,. \tag{2.22}$$

Comme $(\cos_{|\mathbb{R}})' = -\sin_{|\mathbb{R}}$ (cf. 9) et $\sin_{|\mathbb{R}} > 0$ sur $[0;2]$ par (2.21), $\cos_{|\mathbb{R}}$ est strictement décroissante sur $[0;2]$. Comme $\cos_{|\mathbb{R}}$ est continue, $\cos(0) = 1$ (par la définition et 1) et $\cos(2) < 0$ (cf. (2.20)), il existe un unique $t \in [0;2]$ tel que $\cos(t) = 0$. On le note t_0 et on pose $\pi = 2t_0$.
Comme $\cos_{|\mathbb{R}}$ est strictement positive sur $[0;t_0[$ et $(\sin_{|\mathbb{R}})' = \cos_{|\mathbb{R}}$ (cf. 9), $\sin_{|\mathbb{R}}$ est strictement croissante sur $[0;t_0]$ et, comme $\sin(0) = 0$ (par la définition), $\sin_{|\mathbb{R}}$ est strictement positive sur $]0;t_0]$. D'après (2.22), $\sin^2(t_0) = 1$ donc $\sin(t_0) = 1$. D'où $\varphi(t_0) = \cos(t_0) + i\sin(t_0) = i$.

Soit $t \in [0; t_0[$. Comme $\sin(t) < \sin(t_0) = 1 = \mathrm{Im}(i)$, on a nécessairement $\varphi(t) \neq i$. Donc t_0 est le minimum de l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}^+ ;\ \varphi(t) = i\}$.
Par 1, 2 et 3, on a $\varphi(2t_0) = \varphi(t_0)^2 = i^2 = -1$, $\varphi(4t_0) = \varphi(2t_0)^2 = 1 = \varphi(0)$, $\varphi(3t_0) = \varphi(t_0)\varphi(2t_0) = -i$ et $\varphi(-2t_0) = \overline{\varphi(2t_0)} = \overline{-1} = -1$. On a montré 12.
On note que l'argument précédent montre que, sur $[0; t_0]$, $\cos_{|\mathbb{R}}$ et $\sin_{|\mathbb{R}}$ sont positives et sin, qui est continue, est bijective de $[0; t_0]$ sur $[0; 1]$.
Pour $t \in [t_0; 2t_0]$, on a, par 3, $\varphi(t) = \varphi(t - t_0)\varphi(t_0) = i\varphi(t - t_0) = i(u + iv)$ avec $u \geq 0$ et $v \geq 0$ car $t - t_0 \in [0; t_0]$. Donc $\cos(t) = -v \leq 0$ et $\sin(t) = u \geq 0$.
Pour $t \in [2t_0; 3t_0]$, on a, par 3, $\varphi(t) = \varphi(t - 2t_0)\varphi(2t_0) = -(u + iv)$ avec $u \geq 0$ et $v \geq 0$ car $t - 2t_0 \in [0; t_0]$. Donc $\cos(t) = -u \leq 0$ et $\sin(t) = -v \leq 0$.
Pour $t \in [3t_0; 4t_0]$, on a, par 3, $\varphi(t) = \varphi(t - 3t_0)\varphi(3t_0) = -i(u + iv)$ avec $u \geq 0$ et $v \geq 0$ car $t - 3t_0 \in [0; t_0]$. Donc $\cos(t) = v \geq 0$ et $\sin(t) = -u \leq 0$.
Pour montrer 10, il reste à prouver la surjectivité de φ.
Soit $(u; v) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $u + iv \in \mathcal{U}$. Nécessairement, $v \in [0; 1] = [\sin(0); \sin(t_0)]$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $\sin_{|\mathbb{R}}$, il existe $t \in [0; t_0]$ tel que $\sin(t) = v$. Comme $(u + iv) \in \mathcal{U}$ et $u \geq 0$,

$$u \;=\; \sqrt{1 - v^2} \;=\; \sqrt{1 - \sin^2(t)} \;=\; |\cos(t)| \;=\; \cos(t)\,,$$

car $\cos_{|\mathbb{R}}$ est positive sur $[0; t_0]$. Donc $u + iv = \cos(t) + i\sin(t) = \varphi(t)$. (*)
Soit $u \in \mathbb{R}^-$ et $v \in \mathbb{R}^+$ tel que $u + iv \in \mathcal{U}$. En appliquant le résultat (*) à $(u + iv)/i$, il existe $t \in [0; t_0]$ tel que $u + iv = i\varphi(t) = \varphi(t_0)\varphi(t) = \varphi(t_0 + t)$, par 3.
Soit $(u; v) \in (\mathbb{R}^-)^2$ tel que $u + iv \in \mathcal{U}$. En appliquant le résultat (*) à $-(u + iv)$, il existe $t \in [0; t_0]$ tel que $u + iv = -\varphi(t) = \varphi(2t_0)\varphi(t) = \varphi(2t_0 + t)$, par 3.
Soit $u \in \mathbb{R}^+$ et $v \in \mathbb{R}^-$ tel que $u + iv \in \mathcal{U}$. En appliquant le résultat (*) à $\overline{u + iv}$, il existe $t \in [0; t_0]$ tel que $u + iv = \overline{\varphi(t)} = \varphi(-t)$, par 2.
On a montré que φ est surjective, ce qui termine la preuve de 10.
En partant de $\varphi(0) = 1 = \varphi(4t_0)$ (cf. 12) et en utilisant 3, on montre par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(4kt_0) = 1$. On en déduit par 2 que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(-4kt_0) = 1$, donc on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi(4kt_0) = 1$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a donc, par 3, $\varphi(t + 4t_0) = \varphi(t)\varphi(4t_0) = \varphi(t)$. Donc φ est périodique de période $4t_0 = 2\pi$. Cela montre, en particulier, l'implication "$\Longleftarrow$" dans 11 et aussi 13 puisque $\cos_{|\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\varphi$ et $\sin_{|\mathbb{R}} = \mathrm{Im}\varphi$.
Soit $(t; t') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(t) = \varphi(t')$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ (resp. $p' \in \mathbb{Z}$) la partie entière de $t/(4t_0)$ (resp. $t'/(4t_0)$) et on pose $\theta := t - 4pt_0$ (resp. $\theta' := t' - 4p't_0$). On a $0 \leq \theta < 4t_0$ et $0 \leq \theta' < 4t_0$ et, par périodicité, $\varphi(\theta) = \varphi(t) = \varphi(t') = \varphi(\theta')$. Soit $u = \mathrm{Re}(\varphi(\theta))$ et $v = \mathrm{Im}(\varphi(\theta))$.
Cas où $(u; v) \in (\mathbb{R}^+)^2$. D'après la détermination des signes de $\cos_{|\mathbb{R}}$ et $\sin_{|\mathbb{R}}$ sur $[0; 4t_0]$ obtenue plus haut, on a nécessairement $\theta, \theta' \in [0; t_0]$.
Cas où $u \in \mathbb{R}^-$ et $v \in \mathbb{R}^+$. D'après la détermination des signes de $\cos_{|\mathbb{R}}$ et $\sin_{|\mathbb{R}}$ sur $[0; 4t_0]$, on a nécessairement $\theta, \theta' \in [t_0; 2t_0]$. Par 3 et 4, on a

$$\varphi(\theta - t_0) \;=\; \frac{\varphi(\theta)}{\varphi(t_0)} \;=\; \frac{\varphi(\theta')}{\varphi(t_0)} \;=\; \varphi(\theta' - t_0)$$

donc $\sin(\theta - t_0) = \sin(\theta' - t_0)$ avec $\theta - t_0, \theta' - t_0 \in [0; t_0]$.
Cas où $(u; v) \in (\mathbb{R}^-)^2$. D'après la détermination des signes de $\cos_{|\mathbb{R}}$ et $\sin_{|\mathbb{R}}$ sur $[0; 4t_0]$, on a nécessairement $\theta, \theta' \in [2t_0; 3t_0]$. Par 3 et 4, on a

$$\varphi(\theta - 2t_0) \;=\; \frac{\varphi(\theta)}{\varphi(2t_0)} \;=\; \frac{\varphi(\theta')}{\varphi(2t_0)} \;=\; \varphi(\theta' - 2t_0)$$

donc $\sin(\theta - 2t_0) = \sin(\theta' - 2t_0)$ avec $\theta - 2t_0, \theta' - 2t_0 \in [0; t_0]$.
Cas où $u \in \mathbb{R}^+$ et $v \in \mathbb{R}^-$. D'après la détermination des signes de $\cos_{|\mathbb{R}}$ et $\sin_{|\mathbb{R}}$ sur $[0; 4t_0]$, on a nécessairement $\theta, \theta' \in [3t_0; 4t_0]$. Par 3 et 4, on a

$$\varphi(\theta - 3t_0) = \frac{\varphi(\theta)}{\varphi(3t_0)} = \frac{\varphi(\theta')}{\varphi(3t_0)} = \varphi(\theta' - 3t_0)$$

donc $\sin(\theta - 3t_0) = \sin(\theta' - 3t_0)$ avec $\theta - 3t_0, \theta' - 3t_0 \in [0; t_0]$.
Comme $\sin_{|\mathbb{R}}$ est injective de $[0; t_0]$, on obtient, dans tous les cas, $\theta = \theta'$. Cela montre que $t - 4pt_0 = t' - 4p't_0$ soit $t - t' = 4(p - p')t_0$. On a montré l'implication "$\Longrightarrow$" dans 11.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $z \in \mathcal{U}$, il existe, par 10, un $t \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t) = z$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ la partie entière de $(t - \theta)/(4t_0)$. On a $\theta \leq t - 4pt_0 < \theta + 4t_0$. Par 3,

$$\varphi(t - 4t_0) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(4t_0)} = \varphi(t) = z\,.$$

On a montré que la restriction de φ à $[\theta; \theta + 4t_0[= [\theta; \theta + 2\pi[$ est surjective.
Soit $t, t' \in [\theta; \theta + 2\pi[$ tel que $\varphi(t) = \varphi(t')$. D'après l'équivalence de 11, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t = t' + 2k\pi$. Comme $\theta \leq t < \theta + 2\pi$ et $-\theta - 2\pi < -t' \leq -\theta$, on a

$$-2\pi = \theta + (-\theta - 2\pi) < t - t' = 2k\pi < \theta + 2\pi + (-\theta) = 2\pi$$

donc $k = 0$ et $t = t'$. On a montré l'injectivité de la restriction de φ à $[\theta; \theta + 2\pi[$, ce qui termine la preuve de 11.
Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$. En utilisant 3, 5, 10, 8 et 11, on obtient $\exp(z) = \exp(z')$

$$\begin{aligned}
\exp(z) = \exp(z') &\iff \exp\big(\mathrm{Re}(z)\big)\,\varphi\big(\mathrm{Im}(z)\big) = \exp\big(\mathrm{Re}(z')\big)\,\varphi\big(\mathrm{Im}(z')\big) \\
&\iff \exp_{|\mathbb{R}}\big(\mathrm{Re}(z)\big) = \exp_{|\mathbb{R}}\big(\mathrm{Re}(z)\big) \quad \text{et} \quad \varphi\big(\mathrm{Im}(z)\big) = \varphi\big(\mathrm{Im}(z')\big) \\
&\iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z') \in 2\pi\mathbb{Z} \\
&\iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

On a montré 14.
La périodicité de φ de période 2π (cf. 13) donne via la formule $\exp(z) = \exp(\mathrm{Re}(z))\varphi(\mathrm{Im}(z))$ celle de exp de période $2i\pi$. Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Comme $|w| \in]0; +\infty[$, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(r) = |w|$ (cf. 8). D'après 10 et le fait que $w/|w| \in \mathcal{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\theta) = w/|w|$. Par 3, on obtient $\exp(r + i\theta) = \exp(r)\exp(i\theta) = |w| \times w/|w| = w$. On a montré la surjectivité de exp et terminé la preuve de 15 et du théorème. □

Remarque 2.7. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Comme dans la preuve du 8 du théorème 2.1, on peut montrer, pour $x > 0$, que*

$$\exp(x) \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \textit{et donc} \quad \frac{\exp(x)}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!}\,.$$

Comme le terme de droite de la dernière inégalité tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty\,,$$

par le théorème des gendarmes.
En utilisant le 4 du théorème 2.1, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} x^m \exp(-x) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^m \exp(x) = 0\,.$$

Cette famille de résultats s'appellent les résultats de croissances comparées.

2.3 Logarithmes complexes.

Dans le point 8 du théorème 2.1, on a vu que l'exponentielle réelle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*$. La bijection réciproque est le logarithme népérien ln. Comme l'exponentielle complexe n'est pas injective mais est surjective (cf. les points 11 et 15 de ce théorème), on est obligé de réduire le domaine de définition de l'exponentielle complexe pour obtenir une bijection. La situation est similaire à celle rencontrée lorsqu'on cherche à "rendre bijective" la fonction $\cos_{|\mathbb{R}}$ pour construire la fonction arcosinus (cf. L1). Lorsqu'on a trouvé une partie U de $\mathbb{C}$ telle que la restriction de l'exponentielle complexe à U soit bijective, il est naturel d'appeler la bijection réciproque, qui est forcément définie sur une partie de $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, un logarithme complexe. Cela nous amène à la

Définition 2.6. *Soit Ω un ouvert non vide inclus dans $\mathbb{C}^*$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une* détermination du logarithme *sur Ω si f est continue et vérifie, pour tout $z \in \Omega$, $\exp(f(z)) = z$.*

Supposons que, sur un ouvert Ω inclus dans $\mathbb{C}^*$, on ait une "fonction argument" c'est-à-dire une fonction $\arg : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z \in \Omega$, $\arg(z)$ soit un argument de z (au sens de la définition 2.5). Alors on peut écrire, pour $z \in \Omega$,

$$\exp\Big(\ln\big(|z|\big) \;+\; i\arg(z)\Big) \;=\; \exp\Big(\ln\big(|z|\big)\Big)\,\exp\big(i\arg(z)\big) \;=\; |z|\,\exp\big(i\arg(z)\big) \;=\; z\,.$$

On voit que la recherche de déterminations du logarithme est liée à celle de "fonctions argument".
Notons tout de suite que si l'on a une détermination du logarithme $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f + 2ik\pi$ en est une autre, d'après la propriété 15 du théorème 2.1. Lorsque Ω est un domaine inclus dans $\mathbb{C}^*$, on trouve ainsi toutes les déterminations du logarithme sur Ω comme le montre la

Proposition 2.10. *Si Ω est un domaine de $\mathbb{C}$ et si f et g sont deux déterminations du logarithme sur Ω alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) = g(z) + 2ik\pi$ pour tout $z \in \Omega$.*

Démonstration. Pour tout $z \in \Omega$, on a $\exp(f(z)) = z = \exp(g(z))$ donc, par le théorème 2.1, $\exp(f(z) - g(z)) = 1$. Pour tout $z \in \Omega$, il existe, par ce même théorème, un $k(z) \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) - g(z) = 2ik(z)\pi$. Cela définit une fonction $k : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui est continue puisque f et g le sont et $k = (f - g)/(2i\pi)$. Il suffit de montrer que cette fonction est constante.
Supposons qu'il existe $(z_1; z_2) \in \Omega$ tel que $k(z_1) < k(z_2)$. Comme Ω est connexe par arcs, il existe une courbe continue $\gamma : [a; b] \longrightarrow \Omega$ telle que $\gamma(a) = z_1$ et $\gamma(b) = z_2$. Par composition, $k \circ \gamma$ est continue. Comme $(k \circ \gamma)(a) = k(z_1) < k(z_2) = (k \circ \gamma)(b)$, il existe $\ell \in (]k(z_1); k(z_2)[\setminus\mathbb{Z})$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $k \circ \gamma$, il existe $t \in [a; b]$ tel que $(k \circ \gamma)(t) = \ell$. Contradiction car $k \circ \gamma$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
La fonction k est donc constante. $\square$

A-t-on une détermination du logarithme sur le plus sous-ensemble de $\mathbb{C}^*$, à savoir $\mathbb{C}^*$ lui-même ? La réponse est non !

Proposition 2.11. *Si Ω est un ouvert contenant $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ alors il n'existe pas de détermination du logarithme sur Ω. En particulier, il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.*

Démonstration. Supposons qu'on ait une détermination du logarithme f sur Ω. Soit $\gamma : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma(t) = \exp(it)$. D'après le corollaire 2.4, γ est une fonction continue à valeurs dans $\mathcal{U}$ donc dans Ω. Donc $f \circ \gamma$ est aussi continue et on a, d'après le théorème 2.1,

$$(f \circ \gamma)(0) \;=\; f\big(\exp(0)\big) \;=\; f\big(\exp(2i\pi)\big) \;=\; (f \circ \gamma)(2\pi)\,. \tag{2.23}$$

Comme f est une détermination du logarithme sur Ω, on a, pour tout $t \in [0; 2\pi]$,

$$\exp\big((f \circ \gamma)(t)\big) \;=\; \exp\big(f(\gamma(t))\big) \;=\; \gamma(t) \;=\; \exp(it)\,.$$

Par le théorème 2.1, il existe une fonction $k : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $t \in [0; 2\pi]$, $(f \circ \gamma)(t) - t = 2ik(t)\pi$. Comme dans la preuve de la proposition 2.10, on montre que k est continue et, comme elle est à valeurs entières, elle est constante égale à un certain $k_0 \in \mathbb{Z}$. On a donc $(f \circ \gamma)(0) = 2ik_0\pi$ et $(f \circ \gamma)(2\pi) = 2\pi + 2ik_0\pi$, ce qui contredit (2.23). $\square$

Remarque 2.8. *On peut généraliser la proposition précédente à une situation large. On voit que le coeur de la preuve par l'absurde précédente est le fait de pouvoir "faire un tour autour de* 0 *dans* Ω*". Si* Ω *est un ouvert contenant un chemin fermé "entourant" l'origine, on pourra de la même façon montrer l'inexistence d'une détermination du logarithme sur* Ω*. Pour espérer en construire une, il faut "couper"* $\mathbb{C}$ *pour obtenir* Ω *de façon à ne pas pouvoir faire un tel tour dans* Ω*.*

Définition-Proposition 2.7. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned} \Omega_\theta \;&:=\; \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}^+ \;=\; \big\{z \in \mathbb{C}\,;\; \forall\, r \geq 0\,,\, z \neq r\exp(i\theta)\big\} \;\subset\; \mathbb{C}^* \\ \text{et}\quad B_\theta \;&:=\; \big\{z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Im}(z) \in]\theta; \theta + 2\pi[\big\}\,. \end{aligned}$$

Par la définition 2.5, la fonction $\mathrm{Arg}_\theta : \mathbb{C}^* \longrightarrow]\theta; \theta + 2\pi]$ *est l'application qui, à* $z \in \mathbb{C}^*$*, associe l'unique argument de* z *qui appartient à* $]\theta; \theta + 2\pi]$*.*
Alors la fonction exponentielle complexe est bijective de B_θ *sur* Ω_θ*. Sa bijection réciproque* Log_θ *est une détermination du logarithme sur* Ω_θ*. Elle est donnée par*

$$\forall\, z \in \Omega_\theta\,, \quad \mathrm{Log}_\theta(z) \;=\; \ln(|z|) \;+\; i\,\mathrm{Arg}_\theta(z)\,. \tag{2.24}$$

Lorsque $\theta = -\pi$*, la fonction* $\mathrm{Arg}_{-\pi}$ *associe à* $z \in \mathbb{C}^*$ *son argument principal* $\mathrm{Arg}(z) \in]-\pi; \pi]$ *(cf. définition 2.5). La fonction* $\mathrm{Log}_{-\pi}$*, qui est définie sur* $\Omega_{-\pi} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$*, est appelée la détermination principale du logarithme et on la note* Log*. Sa restriction à* $]0; +\infty[$ *coincide avec le logarithme népérien* $\ln$*.*

Démonstration. Soit $z \in \Omega_\theta$. Donc $\mathrm{Arg}_\theta(z)$ est bien défini et appartient à l'intervalle ouvert $]\theta; \theta + 2\pi[$.
En effet, si l'on avait $\mathrm{Arg}_\theta(z) = \theta + 2\pi$, on aurait $z = |z|\exp(i(\theta + 2\pi)) = |z|\exp(i\theta)$ (cf. le point 15 du théorème 2.1) et z appartiendrait à la demi-droite $e^{i\theta}\mathbb{R}^+$. Contradiction.
On résoud l'équation $\exp(w) = z$, d'inconnue $w = x + iy \in B_\theta$ (avec x, y réels). En utilisant le corollaire 2.3, la bijectivité de $\exp_{|\mathbb{R}}$ (cf. le point 8 du théorème 2.1) et le fait que $y \in]\theta; \theta + 2\pi[$, on a

$$\begin{aligned} \exp(w) \;=\; z \iff \big(e^x \;=\; |z| \;\text{ et }\; y \in \mathcal{A}_z\big) &\iff \big(x \;=\; \ln\big(|z|\big) \;\text{ et }\; y \;=\; \mathrm{Arg}_\theta(z)\big) \\ &\iff w \;=\; \ln\big(|z|\big) \;+\; i\,\mathrm{Arg}_\theta(z)\,. \end{aligned}$$

Cela montre la bijectivité de la restriction de l'exponentielle complexe à B_θ et à valeurs dans Ω_θ, que sa bijection réciproque est donnée par (2.24) et que, pour tout $z \in \Omega_\theta$, on a $\exp(\mathrm{Log}_\theta(z)) = z$.
Dans le cas $\theta = -\pi$, on a, pour $z \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathrm{Arg}(z) = 0$ et $\ln(|z|) = \ln(z)$ donc $\mathrm{Log}(z) = \ln(z)$. Donc $\mathrm{Log}_{|\mathbb{R}^{+*}} = \ln$.
Il reste à montrer que les fonctions Log_θ sont continues.
Comme ln est la bijection réciproque d'une fonction continue sur un intervalle ouvert, elle est continue (cf. L1). Comme le module est continu, $\ln \circ |\cdot|$ est continue. Il reste donc à montrer la continuité des fonctions Arg_θ.
Pour $z \in \Omega_\theta$, on vérifie (cf. TD) que $ze^{-i(\pi+\theta)} \in \Omega_{-\pi}$ et que

$$\mathrm{Arg}_\theta(z) \;=\; \mathrm{Arg}\big(ze^{-i(\pi+\theta)}\big) \;+\; \pi \;+\; \theta\,.$$

Il suffit donc de montrer que Arg est continue sur $\Omega_{-\pi}$. Il se trouve (cf. TD) que

$$\forall\, z \in \Omega_{-\pi} \;=\; \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- , \quad \mathrm{Arg}(z) \;=\; 2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) \,+\, |z|}\right)\,. \tag{2.25}$$

Comme Re, Im, $|\cdot|$ sont continues sur $\mathbb{C}$ (cf. exemple 1.3), comme Arctan est continue (cf. L1), on déduit de (2.25) que la fonction Arg est bien continue par composition, somme et quotient. □

Sur $\mathbb{R}^{+*}$, le logarithme népérien ln est une primitive de la fonction $0 < t \mapsto 1/t$. A-t-on une propriété similaire pour les Log_θ ? Oui et même pour toute détermination du logarithme comme le montre la

Proposition 2.12. *Soit Ω un ouvert non vide inclus dans $\mathbb{C}^*$.*

1. *Si f est une détermination du logarithme sur Ω alors f est holomorphe sur Ω et vérifie, pour tout $z \in \Omega$, $f'(z) = 1/z$.*

2. *Si f est une primitive de $z \mapsto 1/z$ sur Ω et si Ω est un domaine, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f - \alpha$ est une détermination du logarithme sur Ω.*

Remarque 2.9. *On a vu dans la proposition 2.11 que la fonction $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$. En revanche, pour $\theta \in \mathbb{R}$, sa restriction à $\Omega_\theta = \mathbb{C} \setminus \mathrm{e}^{i\theta}\mathbb{R}_+$ en a et* Log_θ *en est une, d'après la proposition 2.12.*

Démonstration de la proposition 2.12. Soit Ω un ouvert non vide inclus dans $\mathbb{C}^*$.

1. Prenons une détermination du logarithme f sur Ω et $z_0 \in \Omega$. Pour $z \in (\Omega \setminus \{z_0\})$, on a $\exp(f(z)) = z \neq z_0 = \exp(f(z_0))$. Donc

$$\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \;=\; \frac{\exp(f(z)) - \exp(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \;\stackrel{z\to z_0}{\longrightarrow}\; \exp'\big(f(z_0)\big) \;=\; \exp\big(f(z_0)\big) \;=\; z_0 \;\neq\; 0\,,$$

par composition de limite, puisque exp est $\mathbb{C}$-dérivable et f continue. Par inversion, f est holomorphe en z_0 de nombre $\mathbb{C}$-dérivé $1/z_0$. Donc f est bien une primitive de $\Omega \ni z \mapsto 1/z$.

2. On suppose maintenant que Ω est un domaine et que f est une primitive de $\Omega \ni z \mapsto 1/z$. Comme $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, la fonction $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $g(z) = \exp(f(z))/z$ est bien définie et holomorphe, par composition et quotient (cf. proposition 1.24). De plus, pour $z \in \Omega$,
$$g'(z) \;=\; \frac{z\,f'(z)\,\exp(f(z)) \;-\; \exp(f(z))}{z^2} \;=\; 0\,,$$
puisque $zf'(z) = 1$. Comme Ω est un domaine, g est constante égale à un $c \in \mathbb{C}$, par la proposition 1.26. Comme l'exponentielle et $\Omega \ni z \mapsto 1/z$ ne s'annule pas, $c \neq 0$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(\alpha) = c$ (cf. le point 15 du théorème 2.1). On a donc, pour $z \in \Omega$, par les points 3 et 4 du théorème 2.1,
$$\exp\big(f(z) \,-\, \alpha\big) \;=\; \frac{\exp\big(f(z)\big)}{\exp(\alpha)} \;=\; \frac{z\,g(z)}{c} \;=\; z$$
et, comme la fonction $f - \alpha$ est continue, elle est bien une détermination du logarithme sur Ω. □

On termine cette partie sur les logarithmes en donnant un lien avec les séries entières.

Proposition 2.13. *Le rayon de convergence de la série entière*
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,(z-1)^n$$
est 1 *et sa somme est la restriction de la détermination principale* Log *du logarithme au disque* $D(1;1[$ *de convergence, c'est-à-dire, pour tout* $z \in D(1;1[$*, on a*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,(z-1)^n \;=\; \mathrm{Log}(z)\,. \tag{2.26}$$

Démonstration. En appliquant la règle de D'Alembert pour les séries entières, on trouve que celui de la série considérée est 1. Par la proposition 2.7, sa somme f est holomorphe sur $D(1;1[$ et on a, pour tout $z \in D(1;1[$, en utilisant une série géométrique,
$$f'(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \times n(z-1)^{n-1} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n-1} \;\overset{|z-1|<1}{=}\; \frac{1}{1-(1-z)} \;=\; \frac{1}{z}\,.$$
La fonction f est donc une primitive de $D(1;1[\ni z \mapsto 1/z$. Par la proposition 2.12, c'est une détermination du logarithme sur $D(1;1[\subset \Omega_{-\pi}$. Par la définition-proposition 2.7, Log est aussi une détermination du logarithme sur $D(1;1[$. Par la proposition 2.10, $f - \mathrm{Log}$ est, sur $D(1;1[$, une constante égale à $f(1) - \mathrm{Log}(1) = 0 - 0 = 0$. Donc $f = \mathrm{Log}$ sur $D(1;1[$. □

Remarque 2.10. *Attention, la fonction* Log *est définie sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ *mais la formule* (2.26) *n'est valable que sur* $D(1;1[$*. On a une situation similaire pour la fonction holomorphe* $g : \mathbb{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ *donnée par* $g(z) = 1/(1-z)$*, qui est la somme sur* $D(0;1[$ *de la série entière*
$$\sum_{n\geq 0} z^n$$
mais pas sur un ensemble plus grand puisque cette série diverge pour $|z| \geq 1$.