CHAPTER 4

ANALYTICITÉ DES FONCTIONS HOLOMORPHES.

Jusqu'à présent, on a établi que, pour une fonction f sur un ouvert, on a les équivalences : f est C_h^1 si et seulement si f est C_h^∞ si et seulement si f est analytique. Si f est C_h^1 alors, par définition, f est holomorphe. Dans ce chapitre, on va prouver la réciproque, en montrant : si f est holomorphe alors f est analytique.
Pour ce faire, on va utiliser des primitives. Alors que, pour toutes fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur un intervalle I, on a automatiquement des primitives que l'on peut construire en utilisant des intégrales, la situation est différente pour les fonctions complexes d'une variable complexe. Certes, certaines fonctions, comme les polynômes, admettent des primitives (cf. exemple 1.10) mais la fonction $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto 1/z$, qui est pourtant C_h^∞, n'en a pas sur $\mathbb{C}^*$ (cf. exemple 1.11). Il va donc être important de trouver un cadre dans lequel l'existence de primitives est assurée.
On donnera aussi des résultats sur les suites et séries de fonctions holomorphes ainsi que pour des intégrales dépendant d'un paramètre complexe.

4.1 Fonctions holomorphes, primitives et analyticité.

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Supposons que f admette une primitive F. Dans ce cas, F est $\mathbb{C}$-dérivable et $F' = f$. Comme f est continue, F est C_h^1 et donc analytique, par le théorème 3.3. Près de tout point, F est la somme d'une série entière donc sa dérivée f aussi (cf. proposition 2.7). Donc f est analytique donc holomorphe.
Ceci explique pourquoi la conjugaison complexe $\bar{\cdot}$, considérée dans l'exemple 1.12, ne peut avoir de primitive puisqu'elle n'est pas holomorphe (cf. remarques 1.13 et 1.16).
Le fait d'être holomorphe est donc nécessaire pour avoir une primitive mais ce n'est pas suffisant comme le montre l'exemple de la fonction $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par $f(z) = 1/z$.
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Pour construire une primitive F de f, il est naturel (puisque c'est ce que l'on fait pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) de fixer un point $z_0 \in \Omega$ et d'utiliser une intégrale :

$$F(z) \;=\; \int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w$$

le long d'un chemin γ_z allant de z_0 à z en restant dans Ω. Il y a alors immédiatement plusieurs questions qui se posent:

1. Que fait-on s'il n'existe pas de chemin allant de z_0 à z ? Cela ne se produit pas si on travaille dans un ouvert Ω connexe par arcs.

2. S'il existe un tel chemin, il y a d'autres. On a vu sur des exemples que la valeur de l'intégrale peut dépendre du chemin choisi. Dans ce cas, on doit préciser le chemin choisi pour que F soit bien définie.

3. Définit-on ainsi une primitive de f ?

On rappelle la définition d'un ensemble étoilé, voir la Définition 1.16 à la fin de la Section 1.1. On a vu qu'un ensemble étoilé est connexe par arcs (cf. proposition 1.11).

Définition 4.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. On dit que Ω est étoilé par rappor à z_0 si, pour tout $z \in \Omega$, on a $[z_0; z] \subset \Omega$. On dit que Ω est étoilé s'il existe un $z_1 \in \Omega$ tel que Ω est étoilé par rappor à z_1.*

Remarque 4.1. *Exemples et contre-exemples.*

1. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Le disque $D(z_0; R[$ est étoilé par rapport à z_0. En fait, comme $D(z_0; R[$ est convexe, il est étoilé par rapport à tout $z_1 \in D(z_0; R[$. Ceci est aussi vrai pour le disque fermé $D(z_0; R]$. On a déjà signalé ces faits dans la remarque 1.8.*

2. *$\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé.*

3. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > r > 0$. L'ensemble $D(z_0; R[\setminus D(z_0; r]$ n'est pas étoilé.*

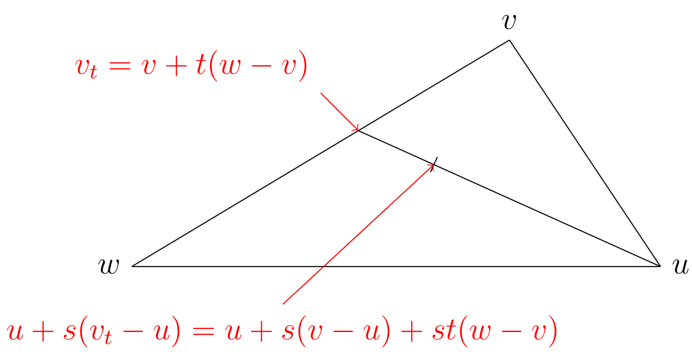
4. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\Omega_\theta := \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}^+$. Soit $r > 0$. Ω_θ est étoilé par rapport à $z_0 = -re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$.*

Voir TD.

Définition 4.2. *Soit $u, v, w \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. On note par $T(u; v; w)$ le triangle (plein) de sommets u, v, w, défini par*

$$T(u; v; w) \ := \ \left\{ s(tw + (1-t)v) + (1-s)u \,;\, (s; t) \in [0; 1]^2 \right\}.$$

C'est un compact comme image par une application continue du compact $[0; 1]^2$. Le bord de $T(u; v; w)$, noté $\partial T(u; v; w)$, est la réunion $= [u; v] \cup [v; w] \cup [w; u]$ des côtés du triangle. Soit γ la concaténation des chemins C^1 $\psi_{u;v}$, $\psi_{v;w}$ et $\psi_{w;u}$ (cf. exemple 1.2). C'est un chemin (cf. proposition 1.17).



Remarque 4.2. *Dans le cadre de la définition 4.2, on peut vérifier que l'ensemble* $\partial T(u;v;w)$ *est bien le bord, au sens topologique du terme, c'est-à-dire* $\overline{T}(u;v;w)\setminus\mathring{T}(u;v;w) = T(u;v;w)\setminus\mathring{T}(u;v;w) = \partial T(u;v;w)$*. Voir TD.*

Le théorème qui suit permet de caractériser les fonctions qui admettent des primitives sur des ouverts étoilés.

Théorème 4.1. *Soit* Ω *un ouvert étoilé et* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *continue. Alors* f *admet une primitive sur* Ω *si et seulement si, pour tout triangle* $T(u,v,w) \subset \Omega$*, on a*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,.$$

Ici, γ *est le paramétrage du bord* $\partial T(u;v;w)$ *introduit dans la définition 4.2.*

Remarque 4.3. *Si* Ω *est étoilé, on peut vérifier que l'inclusion* $\partial T(u;v;w) \subset \Omega$ *implique l'inclusion* $T(u;v;w) \subset \Omega$*. Voir TD.*

Démonstration du théorème 4.1. Si f admet une primitive sur Ω alors, le paramétrage γ du bord d'un triangle $T(u;v;w) \subset \Omega$ étant fermé, l'intégrale de f le long de γ est nulle par la proposition 1.26.
Supposons maintenant que, pour tout triangle $T(u;v;w) \subset \Omega$, l'intégrale de f le long de γ est nulle. Soit $z_0 \in \Omega$ un point par rapport auquel Ω est étoilé. Soit $z \in \Omega$, on a $[z_0;z] \subset \Omega$. On pose

$$F(z) \;:=\; \int_{\psi_{z_0;z}} f(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0;r[\subset \Omega$. Soit $h \in \mathbb{C}$ avec $|h| < r$. Comme $z+h \in D(z;r[$, $z+h \in \Omega$ et, comme Ω est étoilé par rapport à z_0, $[z_0;z+h] \subset \Omega$ et

$$F(z+h) \;:=\; \int_{\psi_{z_0;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

Comme $D(z_0;r[$ est convexe et inclu dans Ω, on a $[z;z+h] \subset D(z_0;r[\subset \Omega$. Donc le bord du triangle $T(z_0;z;z+h)$ est inclus dans Ω. Comme Ω est étoilé, $T(z_0;z;z+h)$ est inclus dans Ω, par la remarque 4.3. D'après l'hypothèse, l'intégrale de f le long du paramétrage γ de $\partial T(z;z_0;z+h)$ est nulle. Comme γ est la concaténation $\psi_{z;z_0}\mathring{+}\psi_{z_0;z+h}\mathring{+}\psi_{z+h;z}$, on a, d'après la proposition 1.21,

$$0 \;=\; \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; \int_{\psi_{z;z_0}} f(w)\,\mathrm{d}w \,+\, \int_{\psi_{z_0;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \,+\, \int_{\psi_{z+h;z}} f(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

Donc, par la proposition 1.20,

$$\begin{aligned} F(z+h) \,-\, F(z) \;&=\; \int_{\psi_{z_0;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \,+\, \int_{\psi_{z;z_0}} f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; -\int_{\psi_{z+h;z}} f(w)\,\mathrm{d}w \\ &=\; \int_{\psi_{z;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w\,. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_{\psi_{z;z+h}} 1 \,\mathrm{d}w \;=\; \int_0^1 1 \cdot \psi'_{z;z+h}(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 1 \cdot (z+h-z)\,\mathrm{d}t \;=\; h\,,$$

on a, par la proposition 1.19,

$$\begin{aligned} F(z+h) \,-\, F(z) \,-\, h\,f(z) \;&=\; \int_{\psi_{z;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \,-\, \int_{\psi_{z;z+h}} f(z)\,\mathrm{d}w \\ &=\; \int_{\psi_{z;z+h}} \big(f(w) \,-\, f(z)\big)\,\mathrm{d}w\;. \end{aligned}$$

Par la proposition 1.22, on en déduit que

$$\big|F(z+h) \,-\, F(z) \,-\, h\,f(z)\big| \;\leq\; L\big(\psi_{z;z+h}\big) \sup_{w\in[z;z+h]} |f(w) \,-\, f(z)|\,. \tag{4.1}$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en z, par hypothèse, il existe $\delta \in]0;r]$ tel que

$$\forall\, w \in \mathbb{C} \quad |w \,-\, z| \,<\, \delta \;\Longrightarrow\; |f(w) \,-\, f(z)| \;<\; \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Donc, pour $|h| < \delta$, on a

$$\sup_{w\in[z;z+h]} |f(w) \,-\, f(z)| \;\leq\; \frac{\epsilon}{2} \;<\; \epsilon\,.$$

La fonction

$$h \;\mapsto\; \sup_{w\in[z;z+h]} |f(w) \,-\, f(z)|$$

tend donc vers 0 en 0. Comme $L(\psi_{z;z+h}) = |h|$, on déduit de (4.1) que F est $\mathbb{C}$-derivable en z de $\mathbb{C}$-dérivée $f(z)$. La fonction F est donc une primitive de f sur Ω. $\square$

Remarque 4.4. *Comme on l'a vu à travers la preuve, si on sait que Ω est étoilé par rapport à z_0, on peut se restreindre dans le théorème précédent aux triangles dont z_0 est l'un des sommets. Par ailleurs, le théorème montre que, au moins dans un ouvert étoilé, si l'intégrale le long du bord de n'importe quel triangle est nulle alors la fonction admet une primitive et donc l'intégrale le long de n'importe quel chemin fermé est nulle: si on sait ce qu'il se passe pour les triangles, on récupère ce qu'il se passe pour tous les chemins fermés.*

Le théorème précédent a l'avantage de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue sur un ouvert étoilé Ω admette une primitive. Le point négatif est que cette condition semble difficile à vérifier dans la pratique: il faut calculer l'intégrale de f le long du bord de <u>tous</u> les triangles inclus dans Ω. On va voir qu'en fait, il suffit que f soit $\mathbb{C}$-dérivable pour que cette condition soit satisfaite.

Théorème 4.2 (Goursat)**.** *Soit Ω un ouvert non vide et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors, pour tous $u, v, w \in \mathbb{C}$ tels que $T(u;v;w) \subset \Omega$, on a*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,. \tag{4.2}$$

Ici, γ est le paramétrage du bord $\partial T(u;v;w)$ de $T(u;v;w)$, introduit dans la définition 4.2.

Remarque 4.5. *Attention, on demande que le triangle plein $T(u;v;w)$ soit inclus dans Ω et pas juste son bord, voir l'exemple ci-dessous.*

Exemple 4.1. *Soit $\Omega = \mathbb{C}^*$ et $f(z) = 1/z$. La fonction f est bien holomorphe sur Ω. Prenons le triangle de sommets $a = 1$, $b = \mathrm{e}^{i2\pi/3}$ et $c = \mathrm{e}^{i4\pi/3}$. Le bord du triangle est dans Ω mais pas son intérieur (0 est à l'intérieur du triangle). On va calculer l'intégrale de f le long du triangle. On a*

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\psi_{a;b}} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\psi_{b;c}} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\psi_{c;a}} \frac{\mathrm{d}z}{z}\,.$$

Les segments $[a;b]$ et $[c;a]$ sont inclus dans $\Omega_{]-\pi;\pi[}$ sur lequel la fonction f admet comme primitive, voir la remarque 2.9, la détermination principale du logarithme. On a donc

$$\int_{\psi_{a;b}} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\psi_{c;a}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{Log}(b) - \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(a) - \mathrm{Log}(c) = i\frac{2\pi}{3} - \left(-i\frac{2\pi}{3}\right) = i\frac{4\pi}{3}\,.$$

Enfin $[b;c]$ est inclus dans $\Omega_{]0;2\pi[}$ sur lequel la fonction f admet comme primitive la fonction Log_0. *Donc*

$$\int_{\psi_{b;c}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{Log}_0(c) - \mathrm{Log}_0(b) = i\frac{4\pi}{3} - i\frac{2\pi}{3} = i\frac{2\pi}{3}\,.$$

D'où

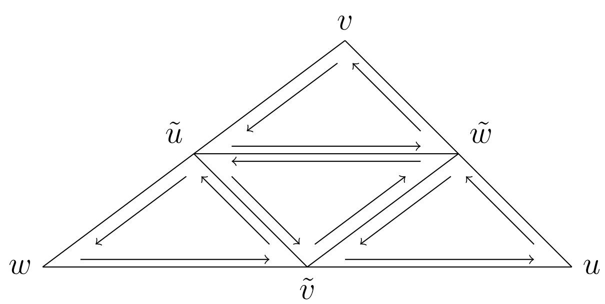
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = i\frac{4\pi}{3} + i\frac{2\pi}{3} = 2i\pi \neq 0\,.$$

On pourra noter que la valeur de l'intégrale est $2i\pi$, la même que dans le 3. de l'exemple 1.7. Ce n'est pas un hasard, voir la partie 4.2.

Démonstration du théorème 4.2. On rappelle que, pour $(z_1;z_2) \in \mathbb{C}^2$, soit $\psi_{z_1;z_2} : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ est le chemin C^1 défini par $\psi_{z_1;z_2}(t) = tz_2 + (1-t)z_1$, un paramétrage du segment $[z_1;z_2]$. On note que $\psi_{z_2;z_1} = (\psi_{z_1;z_2})_{\mathrm{opp}}$.
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $T := T(u;v;w) \subset \Omega$. Soit γ_T le paramétrage du bord $\partial T(u;v;w)$ de $T(u;v;w)$, introduit dans la définition 4.2. C'est la concaténation des chemins $\psi_{u;v}$, $\psi_{v;w}$ et $\psi_{w;u}$, dans cet ordre. Soit $\tilde{u} := (v+w)/2$, $\tilde{v} := (u+w)/2$ et $\tilde{w} := (u+v)/2$. On décompose $T(u;v;w)$ en quatre sous-triangles de la façon suivante :

$$T(u;v;w) = T(u;\tilde{w};\tilde{v}) \cup T(\tilde{u};\tilde{v};\tilde{w}) \cup T(\tilde{u};\tilde{w};v) \cup T(\tilde{u};w;\tilde{v})$$

soit



En utilisant les propositions 1.21 et 1.20, on a

$$
\begin{aligned}
&\int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z \\
= \ &\int_{\psi_{u;v}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{v;w}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{w;u}} f(z)\,\mathrm{d}z \\
= \ &\int_{\psi_{u;\tilde{w}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde{w};v}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{v;\tilde{u}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde{u};w}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{w;\tilde{v}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde{v};u}} f(z)\,\mathrm{d}z \\
= \ &\int_{\psi_{u;\tilde{w}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde{w};\tilde{v}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde{v};\tilde{w}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde{v};u}} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&+ \int_{\psi_{\tilde{w};v}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{v;\tilde{u}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde{u};\tilde{w}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde{w};\tilde{u}}} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&+ \int_{\psi_{\tilde{u};w}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{w;\tilde{v}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde{v};\tilde{u}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde{u};\tilde{v}}} f(z)\,\mathrm{d}z\,.
\end{aligned}
$$

On est passé de la troisième ligne à la quatrième en regroupant le premier et le dernier terme et en ajoutant 0, en regroupant les deuxième et troisième termes et en ajoutant 0, en regroupant les deux termes restant et en ajoutant 0.
On note par $\gamma_{T(a;b;c)}$ le paramétrage du bord du triangle $T(a;b;c)$ (selon la définition 4.2). On a

$$
\begin{aligned}
&\int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z \\
= \ &\int_{\gamma_{T(u;\tilde{w};\tilde{v})}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde{v};\tilde{w}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{T(\tilde{w};v;\tilde{u})}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde{w};\tilde{u}}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{T(\tilde{u};w;\tilde{v})}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde{u};\tilde{v}}} f(z)\,\mathrm{d}z \\
= \ &\int_{\gamma_{T(u;\tilde{w};\tilde{v})}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{T(\tilde{w};v;\tilde{u})}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{T(\tilde{u};w;\tilde{v})}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{T(\tilde{u};\tilde{v};\tilde{w})}} f(z)\,\mathrm{d}z\,. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des quatre triangles inclus dans T qui apparaissant dans la dernière formule. Soit $T_1 \in \mathcal{E}_1$ tel que

$$\forall T \in \mathcal{E}_1\,, \quad \left|\int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \ \leq \ \left|\int_{\gamma_{T_1}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|.$$

En notant $T_0 = T = T(u;v;w)$, on a donc, par (4.3),

$$\left|\int_{\gamma_{T_0}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \ \leq \ \sum_{T\in\mathcal{E}_1} \left|\int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \ \leq \ 4\left|\int_{\gamma_{T_1}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|. \qquad (4.4)$$

On remarque la longueur de γ_{T_1} vérifie $L(\gamma_{T_1}) = L(\gamma_{T_0})/2$. Soit $(u_0;v_0;w_0) := (u;v;w)$ et soit $(u_1;v_1;w_1)$ les sommets de T_1.
Supposons construits, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, des triangles $T_0 \supset T_1 \supset \cdots \supset T_n$ tels que, pour tout $j \in (\mathbb{N} \cap [0;n-1])$, $T_j = T(u_j;v_j;w_j)$, $L(\gamma_{T_{j+1}}) = L(\gamma_{T_j})/2$ et

$$\left|\int_{\gamma_{T_j}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \ \leq \ 4\left|\int_{\gamma_{T_{j+1}}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|. \qquad (4.5)$$

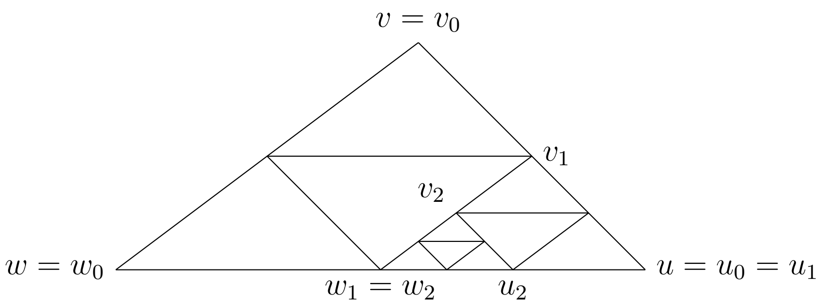
On reprend l'argument menant à (4.4) en remplaçant $T_0 = T$ par T_n, le nouveau triangle T_1 par $T_{n+1} = T(u_{n+1}; v_{n+1}; u_{n+1})$ et $\mathcal{E}_1$ par

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{n+1} \; &:= \Big\{ T\Big(u_n; \frac{u_n+v_n}{2}; \frac{u_n+w_n}{2}\Big)\, ; \; T\Big(\frac{u_n+v_n}{2}; v_n; \frac{v_n+w_n}{2}\Big) \\ &:= \; T\Big(\frac{v_n+w_n}{2}; w_n; \frac{u_n+w_n}{2}\Big)\, ; \; T\Big(\frac{v_n+w_n}{2}; \frac{u_n+w_n}{2}; \frac{u_n+v_n}{2}\Big)\Big\}\,.\end{aligned}$$

Soit $T_{n+1} \in \mathcal{E}_{n+1}$ tel que

$$\forall\, T \in \mathcal{E}_{n+1}\,, \qquad \left| \int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \;\leq\; \left| \int_{\gamma_{T_{n+1}}} f(z)\,\mathrm{d}z \right|\,.$$

Donc (4.4), avec T_0 remplacé par T_n, $\mathcal{E}_1$ remplacé par $\mathcal{E}_{n+1}$ et T_0 remplacé par T_{n+1}, est valide. Enfin, on a aussi $L(\gamma_{T_{n+1}}) = L(\gamma_{T_n})/2$.
Par récurrence, on a construit une suite décroissante de triangles $(T_n)_n$ avec $T_0 = T$ vérifiant, pour tout j, $L(\gamma_{T_{j+1}}) = L(\gamma_{T_j})/2$ et (4.5).



Par récurrence, on vérifie que, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $L(\gamma_{T_n}) = L(\gamma_T)2^{-n} > 0$ et

$$\left| \int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \;\leq\; 4^n \left| \int_{\gamma_{T_n}} f(z)\,\mathrm{d}z \right|\,. \tag{4.6}$$

Pour tout n, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq L(\gamma_{T_n}) = L(\gamma_T)2^{-n}$. La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge donc absolument donc converge vers un z_0'. Pour $z_0 := z_0' + u_0$, on a, pour tout $n > 0$,

$$u_n \;-\; z_0 \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \;-\; z_0' \;\to 0\,,$$

quand $n \to \infty$. Comme

$$|v_n \;-\; u_n| \;+\; |w_n \;-\; u_n| \;\leq\; L\big(\gamma_{T_n}\big) \;=\; L(\gamma_T)2^{-n} \;\to\; 0\,,$$

quand $n \to \infty$, on en déduit que les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent aussi vers z_0. Comme les termes $u_n \in T_n \subset T_0 = T$, pour tout n, et comme T est fermé, $z_0 \in T$. Comme $T \subset \Omega$ et Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0; r[\subset \Omega$. Par hypothèse, f est holomorphe en z_0 donc il existe une fonction $\eta : D(z_0; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ tendant vers 0 en z_0 telle que

$$\forall\, z \in D(z_0; r[\,, \quad f(z) \;=\; f(z_0) \;+\; f'(z_0)\,(z - z_0) \;+\; (z - z_0)\,\eta(z)\,.$$

En utilisant cela, le fait que la fonction polynomiale $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)\,(z - z_0)$ admet une primitive, le fait que les chemins considérés sont fermés et les propositions 1.26, 1.19 et 1.22, on obtient, pour tout n,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_{T_n}} f(z)\,\mathrm{d}z \right| &= \left| \int_{\gamma_{T_n}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{T_n}} \big(f(z_0) + f'(z_0)\,(z-z_0)\big)\,\mathrm{d}z \right| \\
&= \left| \int_{\gamma_{T_n}} \Big(f(z) - \big(f(z_0) + f'(z_0)\,(z-z_0)\big)\Big)\,\mathrm{d}z \right| \\
&= \left| \int_{\gamma_{T_n}} (z - z_0)\,\eta(z)\,\mathrm{d}z \right| \;\le\; L\big(\gamma_{T_n}\big) \sup_{z\in T_n} |z - z_0|\,|\eta(z)| \\
&\le \frac{L\big(\gamma_T\big)}{2^n} \sup_{z\in T_n} |z - z_0|\,|\eta(z)|\,. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Comme la suite $(T_p)_p$ est décroissante, z_0 est aussi la limite de la suite $(u_p)_{p\geq n}$ d'éléments de T_n et, comme T_n est fermé, $z_0 \in T_n$. Pour $z \in T_n$, on a $|z - z_0| \leq L(\gamma_{T_n})/2$ (cf. TD). Donc

$$\sup_{z\in T_n} |z - z_0|\,|\eta(z)| \;\le\; \frac{1}{2} L\big(\gamma_{T_n}\big) \sup_{z\in T_n} |\eta(z)| \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{L\big(\gamma_T\big)}{2^n} \sup_{z\in T_n} |\eta(z)|\;.$$

On déduit de (4.6), (4.7) et de l'inégalité précédente que, pour tout n,

$$\left| \int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \;\le\; 4^n\,\frac{L\big(\gamma_T\big)^2}{2\times 4^n} \sup_{z\in T_n} |\eta(z)| \;=\; \frac{L\big(\gamma_T\big)^2}{2} \sup_{z\in T_n} |\eta(z)|\,. \qquad (4.8)$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme η tend vers 0 en z_0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall\, z \in D(z_0; r[\,,\ |z - z_0| < \delta \implies |\eta(z)| < \frac{2\epsilon}{L\big(\gamma_T\big)^2}\,.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $L(\gamma_T)2^{-N-1} < \delta$. Pour $n \geq N$, on a, pour $z \in T_n$,

$$|z - z_0| \;\le\; \frac{L\big(\gamma_{T_n}\big)}{2} \;=\; \frac{L\big(\gamma_T\big)}{2^{n+1}} \;<\; \delta$$

donc $|\eta(z)| < 2\epsilon/L(\gamma_T)^2$ et donc

$$\sup_{z\in T_n} |\eta(z)| \;\le\; \frac{2\epsilon}{L\big(\gamma_T\big)^2}\,.$$

En reportant dans (4.8), on obtient

$$\left| \int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \;\le\; \epsilon\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a prouvé (4.2). □

La première conséquence du Théorème de Goursat est que, dans un ouvert étoilé, toutes les fonctions holomorphes ont des primitives.

Théorème 4.3. *Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors f admet une primitive sur Ω. En particulier, pour tout chemin fermé γ dont l'image est incluse dans Ω, on a*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,.$$

Démonstration. Comme f est holomorphe, son intégrale le long du bord de n'importe quel triangle inclus dans Ω est nulle, d'après le théorème de Goursat. Puisque Ω est étoilé, le théorème 4.1 garantit que f admet une primitive sur Ω. □

Remarque 4.6. *L'hypothèse sur Ω est importante ! Dans l'exemple 1.7, la fonction $f(z) = 1/z$ est holomorphe mais son intégrale le long du cercle $C(0;1)$ n'est pas nulle. Cette hypothèse n'est pas toujours indispensable. La fonction $g : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto 1/z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, qui n'est pas étoilé, mais son intégrale le long de n'importe quel chemin fermé est nulle puisque g admet $-f$ comme primitive (cf. proposition 1.26).*

Corollaire 4.1. *Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$ et tous chemins γ_1, γ_2 allant de z_1 à z_2, on a*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Démonstration. Soit $\gamma = \gamma_1 \mathring{+} (\gamma_2)_{\mathrm{opp}}$, qui est bien défini car γ_1 s'arrête en z_2 et $(\gamma_2)_{\mathrm{opp}}$ commence en z_2. C'est un chemin (cf. proposition 1.17) qui est à valeurs dans Ω car γ_1 et γ_2 le sont. Comme γ_1 commence en z_1 et $(\gamma_2)_{\mathrm{opp}}$ s'arrête en z_1, γ est fermé. Comme f est holomorphe sur Ω, qui est étoilé, le théorème 4.3 donne

$$0 \;=\; \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{(\gamma_2)_{\mathrm{opp}}} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

(cf. proposition 1.20), ce qui donne le résultat. □

Une seconde conséquence du Théorème de Goursat est une amélioration du Théorème 3.3 : il suffit de supposer que f est holomorphe, pas besoin de demander que sa dérivée f' soit continue.

Théorème 4.4. *Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors f est analytique.*

Démonstration. On suppose f holomorphe. On veut montrer que f est DSE en tout $z_0 \in \Omega$. Soit donc $z_0 \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0;r[\subset \Omega$. Pour tout triangle $T(a;b;c)$ inclus dans $D(z_0;r[$, $T(a;b;c)$ est inclus dans Ω et, par le théorème de Goursat (théorème 4.2), l'intégrale de f le long du paramétrage du bord de $T(a;b;c)$ est nulle. Comme $D(z_0;r[$ est étoilé, le théorème 4.1 garantit que f admet une primitive F sur $D(z_0;r[$. La $\mathbb{C}$-dérivée $F' = f$ de F est holomorphe donc continue. Donc F est C^1_h sur $D(z_0;r[$. Par le théorème 3.3, F est analytique donc DSE en z_0. Par la proposition 2.7, sa $\mathbb{C}$-dérivée $F' = f$ l'est aussi. □

Remarque 4.7. *Comme une fonction holomorphe est analytique, elle vérifie toutes les propriétés vues au chapitre précédent : formule de Cauchy, zéros isolés, prolongement analytique, principe du maximum, théorème de Liouville.*

La validité de l'unicité du prolongement analytique pour les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables justifie l'utilisation du vocable "holomorphe" pour désigner la $\mathbb{C}$-dérivabilité. Le mot "holomorphe" vient du grec holos "entier" et morphê "forme". L'unicité du prolongement analytique dit précisément que la "forme" globale de la fonction est déterminée par sa "forme" locale, sa forme est donc "entière".

Remarque 4.8. *On a vu dans le théorème 4.3 que, sur un ouvert étoilé, toute fonction holomorphe possède une primitive. Le théorème 4.4 ci-dessus montre que cette condition d'holomorphie est en fait nécessaire pour avoir une primitive. En effet, si une fonction f admet une primitive F, alors F est holomorphe donc analytique. Sa dérivée $F' = f$ est donc aussi analytique et en particulier holomorphe (cf. définition 3.2).*
Conclusion : *dans un ouvert étoilé, les fonctions qui admettent des primitives sont exactement les fonctions holomorphes.*
Attention, on rappelle que, si Ω n'est pas étoilé, alors une fonction holomorphe peut ne pas avoir de primitive.

Il se trouve que la réciproque du théorème de Goursat est vraie :

Théorème 4.5 (Morera)**.** *Soit Ω un ouvert non vide et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Si, pour tous $(a; b; c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $T(a; b; c) \subset \Omega$, l'intégrale de f le long du paramétrage du bord de $T(a; b; c)$ est nulle, alors f est holomorphe sur Ω.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0; r[\subset \Omega$. Comme $D(z_0; r)[$ est étoilé, l'hypothèse et le théorème 4.1 assurent que f admet une primitive F sur $D(z_0; r[$. Comme dans la preuve du théorème 4.4, on montre que f est analytique sur Ω donc holomorphe sur Ω (cf. définition 3.2). □

Remarque 4.9. *Dans tout ce qu'on a fait dans cette section, on peut généraliser un peu l'hypothèse sur Ω et remplacer la notion d'ouvert étoilé par celle d'ouvert dit* simplement connexe*. L'idée de Ω simplement connexe est qu'il n'y a pas de "trou à l'intérieur" de Ω. Autrement dit, quel que soit le lacet qu'on prenne dans Ω, tout ce qui est à "l'intérieur du lacet" est dans Ω. La notion d'ouvert étoilé est amplement suffisante pour ce qu'on fera par la suite, on se restreindra donc à ce cadre plus simple à définir proprement.*

On termine ce paragraphe par une application du théorème 4.3. On va l'utiliser pour calculer la *transformée de Fourier* de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-x^2/2)$. Celle-ci joue un rôle important en mathématiques et en particulier en théorie des probabilités (voir le cours de Probabilités du S6).
On donne tout d'abord la définition de la transformée de Fourier d'une fonction. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable, i.e. telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| \,\mathrm{d}x$$

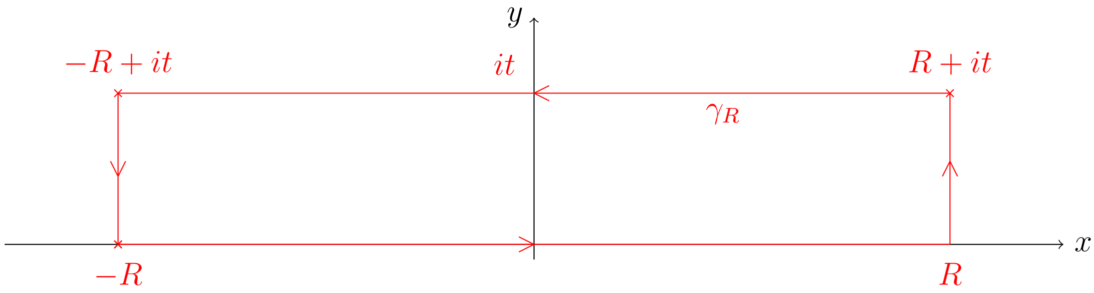
soit convergente. La transformée de Fourier de g est la fonction $\hat{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx}\, g(x) \,\mathrm{d}x \,,$$

l'intégrale précédente étant absolument convergente. Le préfacteur $1/\sqrt{2\pi}$ est une normalisation qui peut varier selon les livres.
On peut vérifier que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est donc bien définie. On peut aussi montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sqrt{2\pi}\,.$$

Cela donne $\hat{f}(0) = 1$. Pour déterminer explicitement $\hat{f}$, on introduit la fonction holomorphe $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $h(z) = \exp(-z^2/2)$. On fixe un $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $R > 0$, soit γ_R la concaténation des chemins rectilignes $\psi_{-R;R}$, $\psi_{R;R+it}$, $\psi_{R+it;-R+it}$ et $\psi_{-R+it;-R}$. C'est un chemin (cf. proposition 1.17).



Comme h est holomorphe sur $\mathbb{C}$, qui est étoilé, on peut appliquer le théorème 4.3 à h ce qui donne, pour tout $R > 0$, comme le chemin γ_R est fermé,

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int_{\gamma_R} h(z)\,\mathrm{d}z \\ &=\; \int_{\psi_{-R;R}} h(z)\,\mathrm{d}z \;+\; \int_{\psi_{R;R+it}} h(z)\,\mathrm{d}z \;+\; \int_{\psi_{R+it;-R+it}} h(z)\,\mathrm{d}z \;+\; \int_{\psi_{-R+it;-R}} h(z)\,\mathrm{d}z \\ &=\; \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \;+\; \int_0^t \mathrm{e}^{-(R+is)^2/2} i\,\mathrm{d}s \;-\; \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-(x+it)^2/2}\,\mathrm{d}x \;-\; \int_0^t \mathrm{e}^{-(-R+is)^2/2} i\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Pour $R > 0$, on a

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-(x+it)^2/2}\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-itx-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

et, comme f est intégrable,

$$\lim_{R\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\,\hat{f}(t)\,.$$

Soit $\sigma \in \{-1; 1\}$. On a

$$\left|\sigma \int_0^t \mathrm{e}^{-(\sigma R+is)^2/2}\, i\,\mathrm{d}s\right| \;\leq\; \int_0^{|t|} \left|\mathrm{e}^{-(\sigma R+is)^2/2}\right|\,\mathrm{d}s \;=\; \int_0^{|t|} \mathrm{e}^{(-R^2+s^2)/2}\,\mathrm{d}s \;\leq\; |t|\,\mathrm{e}^{(-R^2+t^2)/2}\,,$$

qui tend vers 0, quand $R \to +\infty$. Donc

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\int_0^t e^{-(R+is)^2/2} i\,ds - \int_0^t e^{-(-R+is)^2/2} i\,ds\right) = 0\,.$$

On obtient donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, en passant à la limite $R \to +\infty$ dans (4.9),

$$0 = \sqrt{2\pi} - \sqrt{2\pi}\,e^{\frac{t^2}{2}}\,\hat{f}(t) + 0 \quad \text{soit} \quad \hat{f}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)\,,$$

i.e. la transformée de Fourier de f est elle-même.

4.2 Indice d'un point par rapport à un chemin fermé.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma_{z_0;r} : [0; 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it} \in \mathbb{C}$, qui est un lacet C^1 d'image $C(z_0; r)$ (cf corollaire 2.4). On a vu dans la proposition 2.9 (cf. (2.14) et (2.15)), que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{w-z}\,dw &= 1\,, \quad \text{si } z \in D(z_0; r[\,,\\ &= 0\,, \quad \text{si } z \notin D(z_0; r]\,.\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit γ_n la concaténation de n copies de $\gamma_{z_0;r}$. Par le corollaire 1.3, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n} \frac{1}{w-z}\,dw = n\,, \quad \text{si } z \in D(z_0; r[\,.$$

Si $\tilde{\gamma}_n$ est la concaténation de n copies de $(\gamma_{z_0;r})_{\text{opp}}$ alors, par la proposition 1.20, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{w-z}\,dw = -n\,, \quad \text{si } z \in D(z_0; r[\,.$$

Autrement dit, pour γ l'un des chemins précédents et pour $z \notin C(z_0; r)$, la quantité

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{1}{w-z}\,dw$$

est un entier (!) qui compte le nombre de tours que le chemin γ fait autour de z, le nombre étant strictement positif si γ tourne dans le sens trigonométrique positif, et strictement négatif si γ tourne dans le sens trigonométrique négatif.

Définition 4.3. *Soit $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé d'image $\Gamma := \gamma([a; b])$ et $z \notin \Gamma$. On appelle indice de z par rapport à γ la quantité*

$$\mathrm{Ind}(\gamma; z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}\,.$$

Remarque 4.10. *Dans l'exemple 4.1, on a calculé l'indice de 0 par rapport au paramétrage du bord du triangle $T\left(1; e^{i2\pi/3}; e^{i4\pi/3}\right)$. On a trouvé que cet indice était égal à 1, ce qui correspond à l'intuition selon laquelle le chemin tourne une fois autour de 0 dans "le sens trigonométrique positif".*

Théorème 4.6. *Pour tout chemin fermé $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ d'image Γ et tout $z \notin \Gamma$, l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma; z)$ est un nombre entier relatif.*

Démonstration. On commence par le cas où γ est de classe C^1. Pour $t \in [a; b]$, soit γ_t la restriction de γ à $[a; t]$. Soit $\varphi : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(t) \;:=\; \exp\left(\int_{\gamma_t} \frac{\mathrm{d}w}{w - z}\right) \;=\; \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\,\mathrm{d}s\right).$$

En particulier, $\varphi(b) = \exp(2i\pi \mathrm{Ind}(\gamma; z))$. D'après les propriétés de l'exponentielle complexe, il suffit de montrer que $\varphi(b) = 1$ pour avoir le résultat cherché.
Comme l'exponentielle est holomorphe (cf. théorème 2.1), φ est C^1 et

$$\varphi'(t) \;=\; \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,\varphi(t)\,, \tag{4.10}$$

(cf. proposition 1.25). Soit $\psi : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\psi(t) = \varphi(t)/(\gamma(t) - z)$. La fonction ψ est aussi C^1 et, par (4.10),

$$\psi'(t) \;=\; \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} \;=\; 0\,. \tag{4.11}$$

Donc ψ est constante et $\psi(a) = \psi(b)$. Comme γ est fermé, $\gamma(b) = \gamma(a)$, ce qui donne $\varphi(b) = \varphi(a) = \exp(0) = 1$.
Passons au cas général. Soit $\gamma = \mathring{+}_{1 \le k \le n} \gamma_k$ la concaténation issue de la proposition 1.17 avec $\gamma_k : [t_{k-1}; t_k] \longrightarrow \Gamma$. On considère les mêmes fonctions φ et ψ. Pour $1 \le j \le n$ et $t \in [t_{j-1}; t_j]$, on a, en posant $\tilde{\gamma}_j = \mathring{+}_{1 \le k \le j-1} \gamma_k$ et en notant par $(\gamma_j)_t$ la restriction de γ_j à $[t_{j-1}; t]$,

$$\int_{\gamma_t} \frac{\mathrm{d}w}{w - z} \;=\; \int_{\tilde{\gamma}_j} \frac{\mathrm{d}w}{w - z} + \int_{(\gamma_j)_t} \frac{\mathrm{d}w}{w - z}$$

et, par le 3 du théorème 2.1,

$$\varphi(t) \;:=\; \exp\left(\int_{\tilde{\gamma}_j} \frac{\mathrm{d}w}{w - z}\right) \exp\left(\int_{(\gamma_j)_t} \frac{\mathrm{d}w}{w - z}\right).$$

Donc φ est C^1 sur $[t_{j-1}; t_j]$. En appliquant l'argument précédent sur $[t_{j-1}; t_j]$, on obtient $\psi(t_{j-1}) = \psi(t_j)$. Ceci étant vrai pour tout j, on a $\psi(a) = \psi(b)$. On termine la preuve comme dans l'argument précédent. $\square$

Étant donné un chemin fermé γ d'image Γ, on s'intéresse à l'application $\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ qui, à $z \notin \Gamma$, associe son indice $\mathrm{Ind}(\gamma; z)$ par rapport à γ. On rappelle que, comme γ est continu et défini sur un compact, Γ est un compact de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ est un ouvert non borné de $\mathbb{C}$. De plus, par le théorème 4.6, Ind_γ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Proposition 4.1. *Soit γ un chemin fermé d'image Γ et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Alors l'application $\mathrm{Ind}_\gamma : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ est*

1. *continue sur Ω;*
2. *constante sur chaque chaque sous-ensemble connexe par arcs $\tilde{\Omega}$ de Ω;*

3. nulle sur un sous-ensemble non borné et connexe par arcs $\tilde{\Omega}$ de Ω.

4. nulle sur $\mathbb{C} \setminus D(0;R]$, pour un certain $R > 0$.

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que $D(z_0; r_0[\subset \Omega$. Soit $r \in]0; r_0[$. La distance de $D(z_0; r]$ à Γ :

$$\rho \ := \ \inf \left\{ |z - w| \, ; \ z \in D(z_0; r] \, , \ w \in \Gamma \right\}$$

est strictement positive (cf. TD ou L2). Soit $(z; z') \in (D(z_0; r])^2$. D'après la proposition 1.19,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) - \mathrm{Ind}_\gamma(z') \ = \ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \left(\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z'} \right) \mathrm{d}w \ = \ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{z - z'}{(w - z)\,(w - z')} \mathrm{d}w$$

donc, en utilisant la proposition 1.22, on obtient

$$\left| \mathrm{Ind}_\gamma(z) - \mathrm{Ind}_\gamma(z') \right| \ \leq \ \frac{L(\gamma)\,|z - z'|}{2\pi} \sup_{w \in \Gamma} \frac{1}{|w - z|\,|w - z'|} \ \leq \ \frac{L(\gamma)\,|z - z'|}{2\pi\rho^2} \, .$$

Cela montre que Ind_γ est $L(\gamma)/(2\pi\rho^2)$-lipschitzienne sur $D(z_0; r]$, donc continue en z_0. Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in \Omega$, Ind_γ est continue sur Ω.
Soit $(z; z') \in \Omega^2$ tel qu'il existe une application continue $\sigma : [0; 1] \longrightarrow \Omega$ avec $\sigma(0) = z$ et $\sigma(1) = z'$. Comme Ind_γ est continue, il en est de même de $\mathrm{Ind}_\gamma \circ \sigma$. Par le théorème 4.6, $\mathrm{Ind}_\gamma \circ \sigma$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Si $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq \mathrm{Ind}_\gamma(z')$ alors il existe un réel non entier ℓ compris entre $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = (\mathrm{Ind}_\gamma \circ \sigma)(0)$ et $\mathrm{Ind}_\gamma(z') = (\mathrm{Ind}_\gamma \circ \sigma)(1)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $\mathrm{Ind}_\gamma \circ \sigma$, $\mathrm{Ind}_\gamma \circ \sigma$ prend la valeur ℓ. Contradiction puisque la fonction est à valeurs entières. D'où $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z')$.
Soit $\tilde{\Omega}$ un sous-ensemble connexe par arcs de Ω. Pour tout $(z; z') \in \tilde{\Omega}^2$, il existe donc une application continue $\sigma : [0; 1] \longrightarrow \Omega$ avec $\sigma(0) = z$ et $\sigma(1) = z'$. Par l'argument précédent, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z')$. Donc Ind_γ est constante sur $\tilde{\Omega}$.
Soit $\tilde{\Omega}$ un sous-ensemble non borné et connexe par arcs de Ω. Comme Γ est compact, il existe $R > 0$ tel que $\Gamma \subset D(0; R]$. On note que l'ouvert $\mathbb{C} \setminus D(0; R]$ est connexe par arcs. Comme $\tilde{\Omega}$ est non borné, il existe $z \in \tilde{\Omega}$ tel que $|z| > R$. Donc $z \in \tilde{\Omega} \cap (\mathbb{C} \setminus D(0; R])$ et l'ensemble $\tilde{\Omega} \cup (\mathbb{C} \setminus D(0; R])$ est connexe par arcs. La fonction Ind_γ est donc constante sur cet ensemble. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > \max(R; L(\gamma)/\pi)$, on a, grâce à la proposition 1.22,

$$\left| \mathrm{Ind}_\gamma(n) \right| \ = \ \frac{1}{2n\pi} \left| \int_\gamma \frac{1}{\frac{w}{n} - 1} \mathrm{d}w \right| \ \leq \ \frac{L(\gamma)}{n\pi} \, ,$$

puisque, pour tout $w \in \Gamma \subset D(0; R]$, $1 \leq |(w/n) - 1| + |w/n| \leq |(w/n) - 1| + (1/2)$ donc $|(w/n) - 1| \geq (1/2)$. Comme le majorant précédent est strictement inférieur à 1 et comme Ind_γ est à valeurs entières, $\mathrm{Ind}_\gamma(n) = 0$. Comme Ind_γ est constante sur $\tilde{\Omega} \cup (\mathbb{C} \setminus D(0; R])$, auquel n appartient, Ind_γ est nulle sur cet ensemble. Cela prouve 3 et 4. □

Remarque 4.11. *En TD, on donne une méthode pratique de calcul de l'indice d'un point par rapport à un chemin.*

Remarque 4.12. *Étant donné un ouvert Ω, on peut montrer que Ω se décompose de façon unique comme une réunion disjointe de domaines, i.e. de sous-ensembles ouverts et connexes* *par arcs. Ces ensembles sont appelés les composantes connexes de Ω. Lorsque Ω est le complémentaire de l'image Γ d'un chemin, Ω contient le complémentaire d'un disque $D(0; R]$, qui est connexe par arcs, et on a exactement une de ces composantes connexes qui est non bornée. On peut alors reformuler la proposition 4.1 en disant que l'indice par rapport à γ est constant sur chaque composante connexe de $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ et qu'il est nul sur la composante connexe non bornée.*

Remarque 4.13. *On sait plus de choses sur l'indice par rapport à un lacet γ. Il se trouve que le complémentaire de l'image de γ a une unique composante connexe non bornée (l'extérieur de γ) et une unique composante connexe bornée (l'intérieur de γ). Il se trouve que l'indice par rapport à γ est à valeurs dans $\{-1; 0; 1\}$. Sur la composante connexe non bornée, cet indice est nul (cf. proposition 4.1). Sur la composante connexe bornée, il est constant égal à 1 ou égal à -1. On peut définir l'orientation du lacet en fonction de cette dernière valeur (positive si cette valeur est 1, négative si cette valeur est -1).*
Tout ceci est particulièrement difficile à démontrer et fait partie d'un théorème de Jordan.

4.3 Formule de Cauchy générale.

Dans la proposition 3.4, on a montré, pour une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1_h, $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0; r] \subset \Omega$, les formules (3.3) et (3.4) que l'on peut regrouper, en utilisant la notion d'indice, en la formule

$$\forall\, z \in \big(\Omega \setminus C(z_0; r)\big)\,, \quad \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w \;=\; 2i\pi\, f(z)\, \mathrm{Ind}(\gamma; z)\,,$$

où $\gamma_{z_0;r} : [0; 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ est un paramétrage du cercle $C(z_0; r)$ (cf. corollaire 2.4). D'après le théorème 4.4 et la proposition 3.1, une fonction holomorphe sur Ω y est analytique donc de classe C^1_h. La formule précédente s'applique donc à une fonction holomorphe. C'est la formule de Cauchy pour les cercles. Le résultat suivant montre que cette formule reste valable dans un ouvert étoilé si l'on remplace le paramétrage du cercle par un chemin fermé. Cette formule de Cauchy générale jouera un rôle important dans le chapitre suivant (cf. théorème 5.1).

Théorème 4.7 (Formule de Cauchy)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, γ un chemin dont l'image Γ est incluse dans Ω et $z \in (\Omega \setminus \Gamma)$. On a alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w \;=\; f(z)\, \mathrm{Ind}(\gamma; z)\,. \tag{4.12}$$

Démonstration. Pour $w \in \Gamma$, on écrit $f(w) = (f(w) - f(z)) + f(z)$ et on applique la proposition 1.19. On a donc

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w \;&=\; \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, \mathrm{d}w \;+\; \int_\gamma \frac{f(z)}{w - z}\, \mathrm{d}w \\ &=\; \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, \mathrm{d}w \;+\; 2i\pi\, f(z)\, \mathrm{Ind}(\gamma; z)\,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = f'(z)$ et, pour $w \neq z$, $g(w) = (f(w) - f(z))/(w - z)$. Par la proposition 1.25 et la définition 1.31, g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$ et continue en z. D'après le théorème 4.4, f est DSE en z : il existe $R > 0$ et une suite $(a_n)_n$ de complexes (suite dépendant de z) tels que

$$\forall\, w \in D(z; R[\,, \quad f(w) \;=\; f(z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(w \,-\, z)^n\,.$$

Pour $w \in D(z; R[\setminus\{z\}$, on a donc

$$g(w) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(w \,-\, z)^{n-1}\,.$$

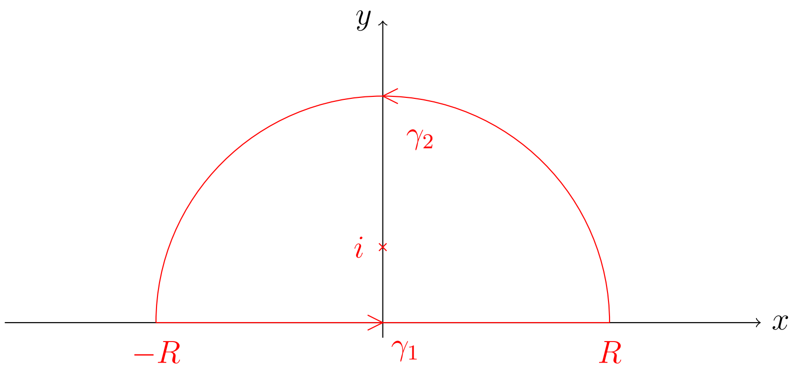
Comme les deux membres de cette égalité sont continus au point z, cette égalité est valable pour $w \in D(z; R[$. Par la proposition 2.7, g est holomorphe au point z. Donc g est holomorphe sur Ω et, comme Ω est étoilé, l'intégrale de g le long du chemin fermé γ est nulle, par le théorème 4.3. En reportant ce résultat dans (4.13), on obtient (4.12). $\square$

Application de la formule de Cauchy générale. On veut calculer

$$I \;:=\; \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Notons que la fonction $g(t) = \dfrac{\cos(t)}{1 + t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $|g(t)| = O\left(1/t^2\right)$ en $+\infty$, donc I est bien définie.

On considère, pour tout $R > 0$, le chemin γ_R donné par la concaténation de $\gamma_1 : [0; 1] \ni t \mapsto Rt + (1 - t)(-R)$ et de $\gamma_2 : [0; \pi] \ni t \mapsto Re^{it}$ (cf. proposition 1.17 et corollaire 2.4)



et on calcule

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{1 + z^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{i; -i\} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $h : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$f(z) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{iz}}{1 + z^2} \quad \text{et} \quad h(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z + i}\,.$$

Elles sont holomorphes comme quotient de fonctions holomorphes. On a, en utilisant la partité de cosinus et l'imparité de sinus,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^R \frac{\cos(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \longrightarrow 2I\,,\end{aligned}$$

quand $R \to +\infty$. De plus, pour $R > 1$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\exp(iR\mathrm{e}^{it})}{R^2\mathrm{e}^{i2t}+1} \times iR\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t\right| &\le \int_0^\pi \frac{|\exp(-R\sin(t)+iR\cos(t))|}{|R^2\mathrm{e}^{i2t}+1|} R\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^\pi \frac{\exp(-R\sin(t))}{R^2-1} R\,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{\pi R}{R^2-1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme h est holomorphe sur l'ouvert étoilé $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}(z) > -1\}$ et comme $f(z) = h(z)/(z-i)$, pour z appartenant à l'image de γ_R, on a, par la formule de Cauchy appliquée à h,

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_R} \frac{h(z)}{z-i}\,\mathrm{d}z = 2i\pi\, h(i)\,\mathrm{Ind}(\gamma_R; i) = 2i\pi \frac{1}{2ie} 1 = \frac{\pi}{\mathrm{e}}\,.$$

Ainsi

$$\frac{\pi}{\mathrm{e}} = \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \longrightarrow 2I$$

quand $R \to +\infty$. D'où $I = \pi/(2\mathrm{e})$.

4.4 Suites et séries de fonctions holomorphes.

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ et qu'elle converge uniformément vers f alors f est continue (cf. proposition 1.14). Si on suppose, de plus, que les f_n sont holomorphes (avec Ω ouvert), on voudrait savoir si f est aussi holomorphe. Les résultats de L2 réclament une condition de convergence uniforme sur les différentielles de f_n pour conclure que f est différentiable. On va voir que l'holomorphie permet d'éviter cette condition supplémentaire. C'est une autre manifestation de la "rigidité" des fonctions holomorphes.

Théorème 4.8. *Soit Ω un ouvert non vide et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$. Alors f est holomorphe sur Ω. De plus la suite $(f_n')_n$ des $\mathbb{C}$-dérivées converge vers la $\mathbb{C}$-dérivée f' de f, uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$.*

Remarque 4.14. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur Ω, qui converge vers f uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$. Cela n'implique pas la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur Ω, comme on le montre dans l'exercice 2.1. On ne peut donc pas appliquer à cette suite la proposition 1.14 sur Ω. Malgré cela, f est continue sur Ω. Vérifions-le.*

Soit $z_0 \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $R > 0$ tel que $D(z_0; R[\subset \Omega$. Soit $r \in]0; R[$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur le compact $D(0; r]$, qui est inclus dans Ω, garantit, via la proposition 1.14, la continuité de f en z_0. Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in \Omega$, f est continue sur Ω.

Démonstration du théorème 4.8. Tout d'abord, on sait, par la remarque 4.14, que f est continue sur Ω.
Soit T un triangle inclus dans Ω et γ le paramétrage de son bord (cf. définition 4.2). Comme T est compact, $(f_n)_n$ converge uniformément sur T donc aussi sur son bord ∂T, et, par la proposition 1.18, on a

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Pour tout n, f_n est holomorphe donc, par le théorème de Goursat (cf. théorème 4.2),

$$\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0 \quad \text{donc} \quad \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,.$$

Par le théorème de Morera (cf. théorème 4.5), f est holomorphe sur Ω.
Soit K un compact inclus dans Ω. Comme $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est un fermé disjoint de K, la distance

$$2\rho \;:=\; \inf\big\{|w - z|\,;\; w \in K\,,\; z \in (\mathbb{C} \setminus \Omega)\big\}$$

est strictement positive, l'ensemble

$$K' \;:=\; \big\{z \in \mathbb{C}\,;\; \exists\, w \in K\,;\; |z - w| \;\le\; \rho\big\}$$

est un compact disjoint de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ (cf. proposition 1.9). En particulier, pour tout $z \in K$, $D(z; \rho] \subset K' \subset \Omega$.
Pour tout n, on a, d'après les inégalités de Cauchy pour la $\mathbb{C}$-dérivée première (3.6) appliquée à la fonction holomorphe $f_n - f$ en un point $z \in K$,

$$\big|f_n'(z) - f'(z)\big| \;\le\; \frac{1!}{\rho} \sup_{w \in D(z;\rho]} |f_n(w) - f(w)| \;\le\; \frac{1}{\rho} \sup_{w \in K'} |f_n(w) - f(w)|$$

donc

$$\sup_{z\in K} \big|f_n'(z) - f'(z)\big| \;\le\; \frac{1}{\rho} \sup_{w \in K'} |f_n(w) - f(w)|\,.$$

La convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur K' implique donc celle de $(f_n')_n$ sur K. □

Remarque 4.15. *Sous les hypothèses du théorème 4.8, on peut vérifier par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tout compact $K \subset \Omega$.*

En appliquant le théorème 4.8 à la suite des sommes partielles, on obtient immédiatement la version suivante pour les séries de fonctions holomorphes.

Théorème 4.9. *Soit Ω un ouvert non vide et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que la série $\sum f_n$ converge vers f uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$. Alors f est holomorphe sur Ω, la série $\sum f_n'$ converge vers f' sur tout compact $K \subset \Omega$ et*

$$\forall\, z \in \Omega\,, \quad f'(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z)\,.$$

Exemple 4.2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$f_n(z) \;=\; \frac{1}{n^z} \;=\; \mathrm{e}^{-z\ln(n)}\,.$$

Comme composée et produit de fonctions holomorphes, f_n est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Soit $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) > 1\}$ et, pour $\alpha > 1$, $F_\alpha := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) \geq \alpha\}$. Pour $z \in F_\alpha$,

$$|f_n(z)| \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(z)\ln(n)} \;\leq\; \frac{1}{n^\alpha}$$

et, comme la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^\alpha$ converge, $\sum f_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur le fermé F_α. En particulier, $\sum f_n$ converge simplement sur F_α et, comme ceci est valable pour tout $\alpha > 1$, $\sum f_n$ converge simplement sur Ω. Sa somme f est donnée sur Ω par

$$f(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\,.$$

Soit K un compact inclu dans Ω. Comme Re est continue, elle atteint son minimum sur K en un $z_0 \in K \subset \Omega$. Pour $\alpha = \mathrm{Re}(z_0) > 0$, on a $K \subset F_\alpha$. Par la convergence normale précédente, on en déduit la convergence normale sur K de $\sum f_n$ donc la convergence uniforme sur K de $\sum f_n$ vers f. Par le théorème 4.9, f est donc holomorphe sur Ω.
Cette fonction f est appelée fonction zeta de Riemann et joue un rôle très important en mathématiques, en particulier en théorie des nombres.

4.5 Fonctions holomorphes définies par une intégrale.

En L2, les intégrales sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et dépendant d'un paramètre ont été étudiées. Que se passe-t-il lorsque le paramêtre est complexe et que l'intégrande est holomorphe en ce paramètre ? On va voir que l'holomorphie de l'intégrale s'obtient sous des hypothèses moins restrictives que celles vues en L2 pour la dérivabilité partielle d'intégrales dépendant de paramètres réels.
On **admet** la conséquence suivante du théorème de convergence dominée de Lebesgue (cf. cours d'intégration).

Théorème 4.10. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I\times\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On suppose que,*

1. *pour tout $z \in \Omega$, la fonction $I \ni t \mapsto f(t; z)$ est continue par morceaux,*
2. *pour tout $t \in I$, la fonction $\Omega \ni z \mapsto f(t; z)$ est holomorphe,*
3. *pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux telle que, pour tout $(t; z) \in I \times K$, $|f(t; z)| \leq g(t)$ et $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ converge,*

Alors la fonction $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$F(z) \;=\; \int_I f(t; z)\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et est holomorphe sur Ω. De plus, pour tout $z \in \Omega$,

$$F'(z) \;=\; \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(t;z)\,\mathrm{d}t\,, \tag{4.14}$$

où $\partial/\partial z$ est l'opérateur différentiel $(\partial/\partial x \,-\, i\partial/\partial y)/2$ (cf. définition 1.33).

Remarque 4.16. *Pour celles et ceux qui suivent le cours de théorie de la mesure, et donc l'intégrale de Lebesgue, vous pouvez bien entendu remplacer, ci-dessus et dans la suite, les hypothèses "$I \ni t \mapsto f(t;z)$ est continue par morceaux" et "$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ coninue par morceaux" par "$I \ni t \mapsto f(t;z)$ est mesurable" et "g mesurable".*

Une application immédiate du théorème 4.10 donne une formule de Cauchy (cf. théorème 4.7) pour toutes les dérivées d'une fonction holomorphe.

Proposition 4.2 (Formule de Cauchy pour les dérivées.)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Soit $\gamma : [a;b] \longrightarrow \Omega$ ($a < b$) un chemin fermé et $z \in (\Omega \setminus \gamma([a;b]))$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w\,-\,z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{f^{(n)}(z)}{n!}\times \mathrm{Ind}(\gamma;z)\,. \tag{4.15}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur l'ordre de dérivation n. Pour $n = 0$, (4.15) est vraie d'après le théorème 4.7. Supposons (4.15) vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{(w\,-\,z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \;=\; \int_a^b \frac{f\big(\gamma(t)\big)}{(\gamma(t)\,-\,z)^{n+1}}\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

où γ' est continue par morceaux. On applique le théorème 4.10 à la fonction

$$f(t;z) \;=\; \frac{f\big(\gamma(t)\big)}{(\gamma(t)\,-\,z)^{n+1}}\,\gamma'(t)$$

sur l'ouvert $\Omega \setminus \gamma([a;b]))$ (en utilisant le fait que f est continue). Le membre de gauche de (4.15) est donc holomorphe sur $\Omega \setminus \gamma([a;b]))$ et, pour tout $z \in (\Omega \setminus \gamma([a;b]))$, sa $\mathbb{C}$-dérivée au point z est donnée par

$$\frac{(n+1)}{2i\pi}\int_a^b \frac{f\big(\gamma(t)\big)}{(\gamma(t)\,-\,z)^{n+2}}\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{(n+1)}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w\,-\,z)^{n+2}}\,\mathrm{d}w\,.$$

Comme Ind_γ est constante près de z (cf. proposition 4.1), la $\mathbb{C}$-dérivée du membre de droite de (4.15) au point z est

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}\times \mathrm{Ind}(\gamma;z)\,,$$

ce qui donne (4.15) avec n remplacé par $n+1$. □

Exemple 4.3. *Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $I =]0,+\infty[$. On considère la fonction définie sur $I \times \Omega$ par $f(t,z) = t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}$ où $t^{z-1} = \mathrm{e}^{(z-1)\ln(t)}$. On vérifie que, pour tout z, la fonction $t \mapsto f(t,z)$ est continue sur I et que, pour tout $t > 0$, la fonction $z \mapsto f(t,z)$*

est holomorphe sur Ω (et même sur $\mathbb{C}$ tout entier). Pour $0 < \alpha < \beta$, pour tout z tel que $\alpha \leq \mathrm{Re}(z) \leq \beta$,

$$|f(t,z)| \ = \ \mathrm{e}^{(\mathrm{Re}(z)-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t} \ \leq \ \begin{cases} \mathrm{e}^{(\alpha-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t} \ = \ t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}, & si\ t \leq 1, \\ \mathrm{e}^{(\beta-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t} \ = \ t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}, & si\ t > 1. \end{cases}$$

La fonction g définie par $g(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}, & si\ t \leq 1, \\ t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}, & si\ t > 1, \end{cases}$ est continue par morceaux, positive et intégrable.
En effet, en 0, on a $g(t) \sim t^{\alpha-1}$ et comme $\alpha - 1 > -1$ l'intégrale

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$$

converge. En $+\infty$, on a $g(t) = t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t} = t^{-2} \times t^{\beta+1}\mathrm{e}^{-t} = o(t^{-2})$ puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\beta+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$ (cf. croissances comparées), et l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$$

converge.
Par le théorème 4.10, la fonction Γ donnée par

$$\Gamma(z) \ := \ \int_0^{+\infty} t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et holomorphe sur tout ensemble $\{z \in \mathbb{C}\,;\ \alpha \leq \mathrm{Re}(z) \leq \beta\}$ avec $0 < \alpha < \beta$. Elle est donc bien définie et holomorphe sur Ω. Cette fonction est appelée fonction Gamma.