De même, si la fonction u admet un certain ℓ pour limite en $+\infty$ alors, pour cet ℓ, la proposition (4.49) est vraie et, par l'équivalence, la proposition (4.48) est aussi vraie, donc la suite u tend vers ℓ. Les deux limites sont bien égales.

Il nous reste donc à montrer la

Proposition 4.40. *Dans le cadre précédent, les propositions* (4.48) *et* (4.49) *sont équivalentes.*

Preuve : On montre successivement ((4.48) $\Longrightarrow$ (4.49)) et ((4.49) $\Longrightarrow$ (4.48)).
(4.48) $\Longrightarrow$ (4.49) : On suppose (4.48) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que V contienne tous les termes de la suite u à partir du rang N. Soit $U := [N; +\infty[$. C'est un voisinage de $+\infty$. Soit $x \in D \cap U$. On a $x \in D$ et $x \geq N$, donc $u(x) \in V$. On a montré (4.49).
(4.49) $\Longrightarrow$ (4.48) : On suppose (4.49) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage U de $+\infty$ tel que $u(D \cap U) \subset V$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]A; +\infty[\subset U$. Par la propriété d'Archimède (cf. (1.4)), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq |A| + 1$. Soit $n \in D$ avec $n \geq N$. On a $n \geq N > |A| \geq A$ donc $n \in]A; +\infty[\subset U$. Comme $n \in D \cap U$, on a $u_n = u(n) \in V$. On a montré (4.48). $\square$

Du fait de cette équivalence, un bon nombre de résultats sur les limites de suites sont en fait des cas particuliers de résultats sur les limites de fonctions. Dans de nombreux cas, on remarque que la preuve du résultat sur les suites est une simple adaptation de la preuve du résultat correspondant sur les fonctions.

On termine cette partie en donnant une liste de propriétés sur les limites de suites qui se déduisent de propriétés sur les limites de fonctions.

La proposition 3.35 est une conséquence des propostions 4.11 et 4.18.
La proposition 3.40 est une conséquence de la proposition 4.26.
La proposition 3.43 est une conséquence de la proposition 4.27.
La proposition 3.45 est une conséquence de la proposition 4.32.
La proposition 3.46 est une conséquence de la proposition 4.32.
La proposition 3.47 est une conséquence de la proposition 4.33.
La proposition 3.48 est une conséquence de la proposition 4.36.
La proposition 3.49 est une conséquence de la proposition 4.37.
La proposition 3.51 est une conséquence de la proposition 4.38.

5 Continuité sur un intervalle de fonctions réelles.

T.E.S

Dans cette partie, on va s'intéresser aux fonctions réelles continues sur un intervalle. On établit d'abord le théorème des valeurs intermédiaires. On montre ensuite la bornitude des fonctions continues sur un segment. Enfin, on s'intéresse à la notion de continuité uniforme qui est importante pour définir l'intégrale de Riemann des fonctions continues.

5.1 Théorème des valeurs intermédiaires.

On rappelle que la notion de continuité sur un intervalle a été définie dans la définition 4.14. On montre ici le théorème des valeurs intermédiaires qui dit essentiellement que l'image par une fonction continue d'un intervalle n'a pas de "trou".

Théorème 5.1. Théorème des valeurs intermédiaires. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, I un intervalle non vide inclu dans $\mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle qui est continue sur I. Alors, pour tout $(a; b) \in I^2$, pour tout réel ℓ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in I$ compris entre a et b tel que $\ell = f(x)$.*

T.E.S.

Preuve : Soit $(a;b) \in I^2$ et ℓ compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Si $\ell = f(a)$ (resp. $\ell = f(b)$), $x = a$ (resp. $x = b$) convient.
Si $f(a) = f(b)$, $\ell = f(a)$ donc $x = a$ convient.
Si $a = b$, on a encore $f(a) = f(b)$ donc $\ell = f(a)$ et $x = a$ convient encore.
On suppose désormais que $a \neq b$, $f(a) \neq f(b)$, $\ell \neq f(a)$ et $\ell \neq f(b)$. On traite séparément les trois cas suivants : ($a < b$ et $f(a) > f(b)$); ($a < b$ et $f(a) < f(b)$); $a > b$.

a). Cas où $a < b$ et $f(a) > f(b)$. Soit $\ell \in]f(b); f(a)[$. Soit

$$A := \{x \in [a;b]; \quad f(x) > \ell\}.$$

A est non vide car $a \in A$, par hypothèse. On a $A \subset [a;b] \subset I$. Soit $s = \sup A$. Comme A est majorée par b, $s \leq b$. Comme $a \in A$, $a \leq s$. Donc $s \in [a;b] \subset I$. Par la proposition 3.50, il existe une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $s = \lim_n s_n$. Comme f est continue sur I, elle est continue en s donc, par la proposition 4.15, $\lim_n f(s_n)$ existe et vaut $f(s)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \in A$ donc $f(s_n) > \ell$. Par passage à la limite $n \to +\infty$ dans ces inégalités (cf. proposition 3.48), on obtient $f(s) \geq \ell$.
Supposons $f(s) > \ell$. On a forcément $s \neq b$ car $f(b) < \ell$ et, comme $s \leq b$, on a en fait $s < b$. Comme $\lim_{x\to s} f(x) = f(s)$, on a, pour $\epsilon = (f(s) - \ell) > 0$, l'existence d'un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - s| < \delta$, on ait $|f(x) - f(s)| < \epsilon$ (cf. (4.11)). Soit $x_0 = s + (1/2)\min(b - s; \delta) > s$. On a $|x_0 - s| < \delta$ et $x_0 \in]s;b] \subset [a;b] \subset I \subset \mathcal{D}$. Donc $x_0 \in \mathcal{D}$. On a donc $|f(x_0) - f(s)| < \epsilon$ soit, en particulier, $f(x_0) > f(s) - \epsilon = \ell$. Comme $x_0 \in [a;b]$, on a donc $x_0 \in A$. Par définition de s, $s \geq x_0$. Contradiction avec $x_0 = s + (1/2)\min(b - s; \delta) > s$.
L'hypothèse $f(s) > \ell$ est donc fausse. On a donc $f(s) \leq \ell$. Comme $f(s) \geq \ell$, on obtient $f(s) = \ell$ avec $s \in [a;b]$.

b). Cas où $a < b$ et $f(a) < f(b)$. Soit $\ell \in]f(a); f(b)[$. On considère la fonction $g = -f$, qui est définie sur $\mathcal{D}$. Comme f est continue sur I, g est continue sur I par la proposition 4.32. De plus, $g(a) = -f(a) > -f(b) = g(b)$. D'après le a) appliqué à g, tout réel ℓ' compris entre $g(a)$ et $g(b)$ est l'image par g d'un certain $x' \in [a;b]$. Comme $-\ell \in]-f(b); -f(a)[=]g(b); g(a)[$, il existe donc un $x \in [a;b]$ tel que $g(x) = -\ell$. D'où $f(x) = -g(x) = \ell$.

c). Cas où $a > b$. Soit ℓ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On considère $h : [-b; -a] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(-x)$. On sait que l'application Id est continue sur $\mathbb{R}$ donc, par la proposition 4.32, il en est de même de $-$Id. Comme $-$Id envoie $[-b; -a]$ sur $[a;b]$, où f est continue, on a, par composition, la continuité de h (cf. corollaire 4.30). De plus, ℓ est compris entre $f(a) = h(-a)$ et $f(b) = h(-b)$. On applique à h avec $(a;b)$ remplacé par $(-b;-a)$ le a) si $h(-b) > h(-a)$ ou le b) si $h(-b) < h(-a)$. Il existe donc y compris entre $-b$ et $-a$ tel que $h(y) = \ell$. D'où $\ell = h(y) = f(-y)$ avec $-y$ compris entre a et b. □

Une application classique de ce résultat est la suivante. Si un fonction continue sur un intervalle prend une valeur positive et une valeur négative sur cet intervalle, alors elle s'annule sur cet intervalle. Il suffit d'appliquer le théorème 5.1 avec $f(a)$ une valeur positive et $f(b)$ une valeur négative.

Voyons maintenant une conséquence importante du théorème 5.1. L'image par une fonction continue d'un intervalle n'a pas de "trou".

Corollaire 5.2. *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et continue sur I. Alors l'image $f(I)$ de I par f est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Preuve : Comme I est non vide, $f(I)$ est aussi non vide. Soit $v_- := \inf f(I) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ et $v_+ := \sup f(I) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$. On montre d'abord l'inclusion $]v_-; v_+[\subset f(I)$ puis que $f(I)$ est un intervalle.

T.E.S.

1. Si $v_- = v_+$, l'intervalle $]v_-; v_+[$ est vide donc inclu dans $f(I)$. On suppose désormais que $v_- \neq v_+$. On a forcément $v_- < v_+$, par la proposition 1.13. Soit $y \in]v_-; v_+[$. Comme $y > v_-$, y ne minore pas $f(I)$. Il existe donc $x_- \in I$ tel que $f(x_-) < y$. Comme $y < v_+$, y ne majore pas $f(I)$. Il existe donc $x_+ \in I$ tel que $y < f(x_+)$. Par le théorème 5.1 avec $\mathcal{D}$ remplacé par I, $(a; b)$ remplacé par $(x_-; x_+)$ et ℓ remplacé par y, il existe x compris entre x_- et x_+ tel que $y = f(x)$. Comme I est un intervalle, $x \in I$, donc $y \in f(I)$. Ceci étant vrai pour tout $y \in]v_-; v_+[$, on a montré que $]v_-; v_+[\subset f(I)$.

2. On montre que $f(I)$ est l'un des intervalles suivants : $]v_-; v_+[$, $]v_-; v_+]$, $[v_-; v_+[$ et $[v_-; v_+]$.

   a). Cas où $(v_-; v_+) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de v_- et v_+, on a, pour tout $x \in I$, $v_- \leq f(x) \leq v_+$. Donc $f(I) \subset [v_-; v_+]$. D'après le 1, $]v_-; v_+[\subset f(I)$ donc $f(I)$ est l'un des ensembles : $]v_-; v_+[$, $]v_-; v_+]$, $[v_-; v_+[$ et $[v_-; v_+]$, qui sont tous des intervalles.

   b). Cas où $v_- \in \mathbb{R}$ et $v_+ = +\infty$. Par définition de v_-, on a, pour tout $x \in I$, $v_- \leq f(x)$. Donc $f(I) \subset [v_-; +\infty[$. D'après le 1, $]v_-; +\infty[\subset f(I)$ donc $f(I)$ est l'un des ensembles : $]v_-; +\infty[$ et $[v_-; +\infty[$, qui sont tous des intervalles.

   c). Cas où $v_- = -\infty$ et $v_+ \in \mathbb{R}$. Par définition de v_+, on a, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq v_+$. Donc $f(I) \subset]-\infty; v_+]$. D'après le 1, $]-\infty; v_+[\subset f(I)$ donc $f(I)$ est l'un des ensembles : $]-\infty; v_+[$ et $]-\infty; v_+]$, qui sont tous des intervalles.

   d). Cas où $v_- = -\infty$ et $v_+ = +\infty$. Par 1, $]-\infty; +\infty[\subset f(I)$ donc $f(I) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$, qui est bien un intervalle. □

T.E.S.

Attention : Le résultat ne dit pas que I et $f(I)$ sont forcément des intervalles de même nature. Il est possible que I soit un intervalle ouvert tandis que $f(I)$ est un intervalle fermé. Voyons un exemple. Soit $I =]-2; 2[$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x+2$ si $x \in]-2; -1]$, $f(x) = -x$ si $x \in]-1; 1[$, et $f(x) = x-2$ si $x \in [1; 2[$. On vérifie que f est bien continue.
On montre maintenant que $f(I) = [-1; 1]$.
Sur $]-2; -1]$, f est croissante donc, pour $x \in]-2; -1]$, on a $0 = \lim_{-2} f \leq f(x) \leq f(-1) = 1$ donc $f(x) \in [0; 1]$. Sur $]-1; 1[$, f est décroissante donc, pour $x \in]-1; 1[$, on a $1 = f(-1) = \lim_{(-1)^+} f \geq f(x) \geq \lim_{1^-} f = f(1) = -1$ donc $f(x) \in [-1; 1]$. Sur $[1; 2[$, f est croissante donc, pour $x \in [1; 2[$, on a $-1 = f(1) \leq f(x) \leq \lim_{2} f = 0$ donc $f(x) \in [-1; 0]$. On a montré que $f(I) \subset [-1; 1]$.
Soit $y \in [-1; 1]$. Si $y = 1$ alors $y = f(-1)$. Si $y = -1$ alors $y = f(1)$. Si $y \in]-1; 1[$, $y = f(-y)$. Donc $y \in f(I)$. On a montré que $[-1; 1] \subset f(I)$.
Donc $f(I) = [-1; 1]$, qui est bien un intervalle fermé.
On peut aussi avoir I non borné et $f(I)$ borné. C'est le cas pour $f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. On vérifie que, dans ce cas, $f(I) =]0; 1]$.

5.2 Bornitude sur un segment.

On vient de voir que l'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle mais pas forcément de même nature. Il y a cependant un cas particulier important : le cas où I est un intervalle fermé et borné. Dans ce cas, on a aussi plus de précisions sur le comportement de la fonction continue.

T.E.S.

Théorème 5.3. Théorème de Heine.
Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. l'image $f([a; b])$ de $[a; b]$ par f est bornée et il existe $(c; d) \in [a; b]^2$ tel que

$$f(c) \;=\; \inf f \;:=\; \inf f\big([a;\, b]\big) \quad \text{et} \quad f(d) \;=\; \sup f \;:=\; \sup f\big([a;\, b]\big)\,.$$

En particulier, $f(c)$ est le minimum de $f([a; b])$ et $f(d)$ est le maximum de $f([a; b])$. De plus, $f([a; b]) = [\inf f; \sup f]$.

Preuve :

1. On montre d'abord par l'absurde que f est bornée.

   a). Supposons que f ne soit pas majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n ne majore pas $f([a;b])$ donc il existe $x_n \in [a;b]$ tel que $f(x_n) > n$. Comme la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a;b]$, elle est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. théorème 3.59), il existe une extractrice $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{N}$ (où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x \circ \varphi$ soit convergente vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in D$, $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, on a, par passage à la limite $n \to +\infty$ dans les inégalités (cf. proposition 3.48), $a \leq \ell \leq b$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue au point ℓ. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ converge vers $f(\ell)$.

T.E.S.

   Par ailleurs, on a, pour tout $n \in D$, $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n)$. On sait que φ est une suite tendant vers $+\infty$ (cf. proposition 3.54). Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.48), on déduit des inégalités précédentes que $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ tend vers $+\infty$. Contradiction puisqu'on a montré que cette suite tend vers $f(\ell) \in \mathbb{R}$.
   La fonction f est donc majorée.

   b). Supposons que f ne soit pas minorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n$ ne minore pas $f([a;b])$ donc il existe $x_n \in [a;b]$ tel que $f(x_n) < -n$. Comme la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a;b]$, elle est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. théorème 3.59), il existe une extractrice $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{N}$ (où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x \circ \varphi$ soit convergente vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in D$, $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, on a, par passage à la limite $n \to +\infty$ dans les inégalités (cf. proposition 3.48), $a \leq \ell \leq b$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue au point ℓ. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ converge vers $f(\ell)$.
   Par ailleurs, on a, pour tout $n \in D$, $f(x_{\varphi(n)}) < -\varphi(n)$. On sait que φ est une suite tendant vers $+\infty$ (cf. proposition 3.54) donc $-\varphi$ tend vers $-\infty$ (cf. proposition 3.49). Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.48), on déduit des inégalités précédentes que $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ tend vers $-\infty$. Contradiction puisqu'on a vu que cette suite tend vers $f(\ell) \in \mathbb{R}$.
   La fonction f est donc minorée.

2. On montre maintenant que les bornes supérieure et inférieure de f sont des valeurs de f.

   a). Notons $m_+ = \sup f$. On sait, par 1, que $m_+ \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure (cf. proposition 3.50), il existe une suite d'éléments de $f([a;b])$ qui converge vers m_+, c'est-à-dire il existe une partie infinie D de $\mathbb{N}$ et $(x_n)_{n\in D} \in [a;b]^D$ tels que la suite $(f(x_n))_{n\in D}$ converge vers m_+. En procédant comme au 1.a), on montre l'existence d'une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ (où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x \circ \varphi$ soit convergente vers un certain $\ell_+ \in [a;b]$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue en ℓ_+. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ_+ de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ converge vers $f(\ell_+)$. Comme cette suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ est une sous-suite de la suite convergente $(f(x_n))_{n\in D}$, elle converge donc vers m_+ (cf. proposition 3.55). Par unicité de sa limite (cf. proposition 3.35), on a donc $m_+ = f(\ell_+)$.

T.E.S

   b). Notons $m_- = \inf f$. On sait, par 1, que $m_- \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure (cf. proposition 3.50), il existe une suite d'éléments de $f([a;b])$ qui converge vers m_-, c'est-à-dire il existe une partie infinie D de $\mathbb{N}$ et $(x_n)_{n\in D} \in [a;b]^D$ tels que la suite $(f(x_n))_{n\in D}$ converge vers m_-. En procédant comme au 1.b), on montre l'existence d'une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ (où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x \circ \varphi$ soit convergente vers un certain $\ell_- \in [a;b]$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue en ℓ_-. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ_- de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ converge vers $f(\ell_-)$. Comme cette suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ est une sous-suite de la suite convergente $(f(x_n))_{n\in D}$, elle converge donc vers m_- (cf. proposition 3.55). Par unicité de sa limite (cf. proposition 3.35), on a donc $m_- = f(\ell_-)$.

T.E.S

3. On montre que $f([a;b]) = [\inf f; \sup f]$.
   Par définition des bornes supérieure et inférieure, on a $f([a;b]) \subset [\inf f; \sup f]$. Par 1 et 2, on sait que $\inf f \in f([a;b])$ et $\sup f \in f([a;b])$. Par le corollaire 5.2, on sait que $f([a;b])$ est un intervalle. Donc $f([a;b])$ contient $[\inf f; \sup f]$. On a montré l'égalité souhaitée par double inclusion. □

5.3 Continuité uniforme.

Dans cette partie, on se propose d'introduire une notion de continuité uniforme, qui est plus forte que la continuité (elles sont cependant équivalentes sur un segment, comme on va le voir). Cette notion de continuité uniforme est utile pour définir l'intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un segment.

Avant de définir la continuité uniforme, faisons un petit jeu : chercher l'erreur ? On sait que la fonction $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, qui à $x > 0$ associe $1/x$, est continue sur $]0; +\infty[$ (cf. propositions 4.23 et 4.32). Donc, pour chaque $a \in]0; +\infty[$, elle est continue au point a. Ceci veut dire en particulier que, pour $\epsilon = 1$, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]0; +\infty[\cap]a-\delta; a+\delta[$, on ait $|f(x) - f(a)| < 1$ (cf. propositions 4.13 et 4.22). En prenant $x = a + \delta/2 > 0$, on a donc

$$1 \ > \ \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a+\delta/2} \right| \ = \ \frac{\delta}{a(2a+\delta)} \, . \tag{5.1}$$

D'après les opérations sur les limites (cf. proposition 4.37), la limite à droite, quand $a \to 0^+$, du membre de droite de l'inégalité précédente (5.1) est $+\infty$ alors que ce terme est majoré par 1 !? Où est la faute ?

Dans le raisonnement précédent, on a fait comme si δ ne dépendait pas de a lorsqu'on a affirmé, à l'aide de la proposition 4.37, que la fraction de droite dans (5.1) tend vers $+\infty$, quand a tend vers 0^+. Puisque l'on a obtenu une contradiction, cette indépendance supposée de δ par rapport à a est fausse.

Dire qu'une fonction est uniformément continue signifie essentiellement que "le δ peut être choisi indépendant du a". Le raisonnement précédent montre donc la fonction f n'est pas uniformément continue. Précisément, on a la

Définition 5.4. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit qu'elle est* uniformément continue (sur $\mathcal{D}$) *si*

$$\forall \epsilon > 0 \, , \quad \exists \delta > 0 \, ; \quad \forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \, , \quad \Big(|x - x'| \, < \, \delta \implies \big| f(x) \, - \, f(x') \big| \, < \, \epsilon \Big) \, . \tag{5.2}$$

Il se trouve que cette notion est plus forte que la continuité sur $\mathcal{D}$ (on exige plus de la fonction que pour avoir la continuité sur $\mathcal{D}$) comme l'établit la

Proposition 5.5. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathcal{D}$ alors elle est continue sur $\mathcal{D}$.*

Preuve : Soit $a \in \mathcal{D}$. On montre que f est continue en a. Pour ce faire, on montre (4.11) avec $\ell = f(a)$. Soit $\epsilon > 0$. D'après (5.2), il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \, , \Big(|x - x'| \, < \, \delta \implies \big| f(x) \, - \, f(x') \big| \, < \, \epsilon \Big) \, . \tag{5.3}$$

Soit $x \in \mathcal{D} \cap]a-\delta; a+\delta[$. D'après la propriété (5.3) avec $x' = a$, on a $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, puisque $|x - a| < \delta$. On a montré (4.11) donc la continuité de f en a. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathcal{D}$, on a montré la continuité de f sur $\mathcal{D}$. □

On vient en fait de montrer que la continuité uniforme, qui est caractérisée par (5.2), implique la continuité sur $\mathcal{D}$ est caractérisée par

$$\forall a \in \mathcal{D} \, , \quad \forall \epsilon > 0 \, , \quad \exists \delta > 0 \, ; \quad \forall x \in \mathcal{D} \, , \quad \Big(|x - a| \, < \, \delta \implies \big| f(x) \, - \, f(a) \big| \, < \, \epsilon \Big) \, . \tag{5.4}$$

On remarque que la différence entre (5.2) et (5.4) (en posant $x' = a$) réside dans la position du terme "$\forall x' \in \mathcal{D}$". Dans (5.2), ce terme apparaît après δ tandis que dans (5.4), il figure avant δ. Lorsqu'on a (5.4) avec un δ indépendant de a alors on récupère (5.2). Cela ne se produit pas toujours comme le montre l'exemple plus haut mais c'est ce qu'il se produit pour les fonctions continues sur un segment, comme l'atteste la suite de Théorème de Heine (cf. théorème 5.3) :

Théorème 5.6. Théorème de Heine (**suite**).
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a \leq b$ *et* $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. *Si* f *est continue alors elle est uniformément continue.*

Démonstration : On suppose f continue. On procède par l'absurde. On suppose donc que f n'est pas uniformément continue. La négation

$$\exists \epsilon > 0\,; \quad \forall \delta > 0\,, \quad \exists (x;x') \in [a;b]^2\,; \quad \Big(|x - x'| < \delta \quad \text{et} \quad \big|f(x) - f(x')\big| \geq \epsilon\Big) \tag{5.5}$$

de la proposition (5.2) est donc vraie. Soit $\epsilon_0 > 0$ un tel ϵ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $\delta = 2^{-n}$, (5.5) nous permet de trouver $(u_n; v_n) \in [a;b]^2$ tel que $|u_n - v_n| < \delta$ et $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \epsilon_0$. On a ainsi construit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a;b]$, donc bornées. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. théorème 3.59), on peut extraire de $(u_n)_n$ une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente (avec $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une injection croissante). Soit c sa limite. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq u_{\varphi(n)} \leq b$, on obtient, par passage à la limite dans les inégalités (cf. proposition 3.48), $c \in [a;b]$.
Comme $(2^{-\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite géométrique $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, de raison $1/2 \in [0;1[$, $\lim 2^{-\varphi(n)} = 0$ par les propositions 3.58 et 3.55. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{\phi(n)} - 2^{-\phi(n)} < v_{\phi(n)} < u_{\phi(n)} + 2^{-\phi(n)}$, $(v_{\phi(n)})_n$ avec $\lim u_{\phi(n)} - 2^{-\phi(n)} = 0 = \lim u_{\phi(n)} + 2^{-\phi(n)}$. Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.48), la suite $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers c.
Comme f est continue au point c, les suites $(f(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $f(c)$ (cf. proposition 4.15) donc, par différence, $\lim(f(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} - f(v_{\phi(n)}) = 0$ (cf. proposition 3.46). Par la proposition 3.45, la suite $(|f(u_{\phi(n)}) - f(v_{\phi(n)})|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0. Par passage à la limite dans les inégalités, vraies pour tout n, $|f(u_{\varphi(n)}) - f(v_{\varphi(n)})| \geq \epsilon_0$ (cf. proposition 3.48), on obtient $0 \geq \epsilon_0$, c'est-à-dire une contradiction.
On a donc montré que f est uniformément continue. □

Un autre exemple de fonctions uniformément continues sur un intervalle est fourni par les fonctions lipschitziennes que l'on va voir maintenant.

Définition 5.7. *Soit* I *un intervalle non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. *Soit* $k \in \mathbb{R}^+$. *On dit que* f *est* k*-lipschitzienne* (*sur* I) *si*
$$\forall (x;x') \in I^2\,, \quad \big|f(x) - f(x')\big| \leq k \cdot |x - x'|\,. \tag{5.6}$$
2. *On dit que* f *est lipschitzienne* (*sur* I) *s'il existe* $k \in \mathbb{R}^+$ *tel que* f *soit* k*-lipschitzienne.*

Étant donné un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$, on voit que la fonction identité $\mathrm{Id} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne. D'après (2.12), la fonction valeur absolue est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. On remarque aussi que les fonctions 0-lipschitziennes sur I sont les fonctions constantes sur I.

Proposition 5.8. *Soit* I *un intervalle non vide de* $\mathbb{R}$. *Une fonction lipschitzienne sur* I *est uniformément continue sur* I (*en particulier continue sur* I).

Preuve : L'affirmation entre parathèse découle de la proposition 5.5. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne. Il existe donc un $k \in \mathbb{R}^+$ tel que f soit k-lipschitzienne. On montre (5.2) avec $\mathcal{D}$ remplacé par I.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = \epsilon/(k+1)$. Soit $(x;x') \in I^2$ avec $|x - x'| < \delta$. D'après (5.6),

$$\big|f(x) - f(x')\big| \leq k \cdot |x - x'| \leq k \cdot \frac{\epsilon}{k+1} < \epsilon$$

On a bien montré (5.2). □

6 Dérivabilité.

Dans cette partie, on s'intéresse à la notion de dérivabilité pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

6.1 Nombres dérivés, dérivée.

Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$. Près de a, on cherche à approcher "le mieux possible" le graphe de f par une droite non verticale passant par le point $(a; f(a))$.
Les droites de ce type se distinguent les unes des autres par leur pente. S'il existe une telle droite qui approche "mieux" le graphe de f que les autres, on dira que f est dérivable en a et la pente p de cette droite sera le nombre dérivé de f en a. Dans ce cas, le nombre dérivé en a donne une idée du comportement de f près de a puisque le graphe de f y ressemble à la droite d'équation $y = f(a) + p(x - a)$. Cette dernière sera appelée la tangente à f en a.
Si $\mathcal{D} = \{0\} \cup [1; +\infty[$ et $a = 0$, par exemple, on sent qu'aucune droite passant par $(a; f(a))$ n'approchera le graphe de f mieux que les autres. On remarque que, dans ce cas, 0 n'est pas adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{0\}$. On ne peut pas s'approcher de 0 en restant dans $\mathcal{D} \setminus \{0\}$.
Pour éviter ce phénomène, on imposera que a soit adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$.
Comment exprimer que le graphe de f est proche d'une droite, près de a ? Cela revient essentiellement à dire que, près de a, f est proche de g, où g est la fonction dont le graphe est la droite en question. Comment exprimer que f est proche de g, près de a ? Une façon naturelle est de dire que, près de a, la différence $f - g$ doit être négligeable devant $g - g(a)$. Bref, on demande que $f(x) - g(x)$ soit un petit "o" de $x - a$, c'est-à-dire le produit de $(x - a)$ par une fonction qui tend vers 0 en a.
Voyons un peu ce que veut dire cette dernière propriété. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 6.1. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $\ell \in \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$ qui est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe un voisinage U_0 de 0 et une fonction $\eta : U_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ tels que $\lim_0 \eta = 0$ et, pour tout $h \in U_0$ avec $a + h \in \mathcal{D}$,*
$$f(a+h) \;=\; f(a) \,+\, h \cdot \ell \,+\, h \cdot \eta(h)\,. \tag{6.1}$$
2. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *existe et vaut ℓ.*
3. $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *existe et vaut ℓ.*

Remarque 6.2. *On rappelle que la notion de translation a été introduite dans la proposition 4.23 et utilisée dans la preuve du corollaire 4.29. Dans le cadre de la proposition 6.1, soit U_0 un voisinage de 0. L'ensemble $\{h \in U_0; a + h \in \mathcal{D}\}$ est égal à $t_a(\mathcal{D}) \cap U_0$ et est aussi égal au domaine de définition de la restriction à U_0 de la fonction $f(a + \cdot)$. D'après la preuve en question, 0 est adhérent à $t_a(\mathcal{D})$ donc 0 est aussi adhérent à $\{h \in U_0; a + h \in \mathcal{D}\}$. De même, l'ensemble $\{h \in U_0 \setminus \{0\}; a + h \in \mathcal{D}\}$ est égal à $t_a(\mathcal{D}) \cap (U_0 \setminus \{0\})$ et, comme a est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$, la preuve mentionnée établit que 0 est adhérent à $\{h \in U_0 \setminus \{0\}; a + h \in \mathcal{D}\}$. Cet ensemble est aussi le domaine de définition de la restriction à U_0 de la fonction $h \mapsto (f(a + h) - f(a))/h$.*

Preuve de la proposition 6.1 : L'équivalence ($2 \Longleftrightarrow 3$) découle du corollaire 4.29. On montre l'équivalence ($1 \Longleftrightarrow 2$).
$1 \Longrightarrow 2$: On suppose 1 vraie. Pour étudier la limite du 2, on peut restreindre h à U_0 (cf. proposition 4.18). Pour $h \in U_0 \setminus \{0\}$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on a, d'après l'hypothèse,
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \;=\; \ell \,+\, \eta(h)\,.$$

Comme $\lim_0 \eta = 0$, le membre de gauche tend vers ℓ en 0, par somme (cf. proposition 4.32). On a donc montré 2.
$2 \Longrightarrow 1$: On suppose 2 vraie. Soit $\eta :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\eta(h) = 0$ si $a+h \notin \mathcal{D}$, par $\eta(0) = 0$ et par

$$\eta(h) \; = \; \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \; - \; \ell \, ,$$

si $h \neq 0$ et $a + h \in \mathcal{D}$.
$U_0 :=]-1;1[$ est bien un voisinage de 0. De plus, pour $h \in]-1;1[$ tel que $a+h \in \mathcal{D}$, on a bien (6.1) (y compris pour $h = 0$). Il reste à montrer que $\lim_0 \eta = 0$. On le fait en utilisant (4.11).
Soit $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $\delta' > 0$ tel que, pour $h \in]-\delta';\delta'[$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on ait

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \; - \; \ell \right| \; < \; \epsilon \, .$$

Soit $\delta = \min(1;\delta')$. Pour $h \in]-\delta;\delta[\subset]-1;1[$, on a, si $a+h \notin \mathcal{D}$, $|\eta(h)| = 0 < \epsilon$, et, si $a+h \in \mathcal{D}$, on a $h \in]-\delta';\delta'[$ et, d'après ce qui précède, $|\eta(h)| < \epsilon$. On a montré 1. □

Définition 6.3. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$ qui est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Lorsqu'une (donc toutes les) propriété(s) de la proposition 6.1 est (sont) vérifiée(s), on dit que f est dérivable en a et que ℓ est le nombre dérivé de f en a. On note ce dernier par $f'(a)$. La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée la tangente à f en a.*
Lorsque a est adhérent à $]a;+\infty[\cap\mathcal{D}$ et que l'une (donc toutes les) propriété(s) de la proposition 6.1 est (sont) vérifiée(s) avec f remplacée par sa restriction $f_{|[a;+\infty[\cap\mathcal{D}}$ à $[a;+\infty[\cap\mathcal{D}$, on dit que f est dérivable à droite en a et que ℓ est le nombre dérivée de f en a à droite. On note ce dernier par $f'_d(a)$. La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée la demi-tangente à f en a à droite.
Lorsque a est adhérent à $]-\infty;a[\cap\mathcal{D}$ et que l'une (donc toutes les) propriété(s) de la proposition 6.1 est (sont) vérifiée(s) avec f remplacée par sa restriction $f_{|]-\infty;a]\cap\mathcal{D}}$ à $]-\infty;a]\cap\mathcal{D}$, on dit que f est dérivable à gauche en a et que ℓ est le nombre dérivée de f en a à gauche. On note ce dernier par $f'_g(a)$. La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée la demi-tangente à f en a à gauche.
Soit $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$. On dit que f est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) sur $\mathcal{D}'$ si, pour tout $a \in \mathcal{D}'$, f est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) en a. Dans ce cas, la dérivée (resp. dérivée à droite, resp. dérivée à gauche) de f sur $\mathcal{D}'$ est la fonction $f' : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{K}$ (resp. $f'_d : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{K}$, resp. $f'_g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{K}$) qui, à $x \in \mathcal{D}'$ associe $f'(x)$ (resp. $f'_d(x)$, resp. $f'_g(x)$).

Remarque 6.4. *Dans le cadre de la définition 6.3, on suppose que f est dérivable en a. Pour $p \in \mathbb{K}$, soit $g_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $g_p(x) = f(a) + p(x-a)$. On a $g_p(a) = f(a)$. Le graphe de g_p est donc une droite non verticale qui passe par le point $(a; f(a))$. On a, pour $h \in U_0$ avec $a + h \in \mathcal{D}$,*

$$f(a+h) \; - \; g_p(a+h) \; = \; h \cdot \big(f'(a) \; - \; p \; + \; \eta(h)\big) \, .$$

Si $p = f'(a)$ alors $|f(a+h) \; - \; g_p(a+h)| \leq |h| \cdot |\eta(h)|$ avec h et $\eta(h)$ tendant vers 0 quand h tend vers 0. Si $p \neq f'(a)$ alors, comme $\eta(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $h \in U_0 \cap]-\delta;\delta[$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on ait

$$|\eta(h)| \; < \; \frac{|p \; - \; f'(a)|}{2} \, .$$

Pour $h \in U_0 \cap]-\delta;\delta[$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on a donc

$$\big|f(a+h) \; - \; g_p(a+h)\big| \; \geq \; |h| \cdot \frac{|p \; - \; f'(a)|}{2} \, .$$

Le terme de droite tend certes vers 0 en 0 mais comme h, donc "moins vite" que $h\eta(h)$. C'est dans ce sens que la tangente à f en a (i.e. $g_{f'(a)}$) est plus proche de f que les autres droites g_p.

Voyons quelques exemples simples. Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$ tel que a soit adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Soit $c \in \mathbb{K}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ la fonction constante égale à c. Pour $h \in \mathbb{R}$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on

a $f(a+h) = c = f(a) = f(a) + h \cdot 0 + h \cdot \eta(h)$ où $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction nulle. Par le 1 de la proposition 6.1, f est dérivable en a de nombre dérivé 0.
Vérifions que la fonction $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(x) = x$ est dérivable en a de nombre dérivé 1. Pour $h \in \mathbb{R}$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(a+h) = a+h = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(a)+h = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(a)+h\cdot 1+h\cdot\eta(h)$ où $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction nulle. Par le 1 de la proposition 6.1, $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ est dérivable en a de nombre dérivé 1.
En particulier, si $\mathcal{D}$ est un intervalle, tout point a de $\mathcal{D}$ est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ donc f est dérivable sur $\mathcal{D}$ de dérivée nulle sur $\mathcal{D}$ et $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ de dérivée la fonction constante égale à 1 sur $\mathcal{D}$.
On a montré la

Proposition 6.5. *Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{D}$ qui est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Soit $c \in \mathbb{K}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ la fonction constante égale à c. Alors f est dérivable en a de nombre dérivé 0. L'application $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(x) = x$, est dérivable en a de nombre dérivé 1.*
Dans le cas où $\mathcal{D}$ est un intervalle, f' est la fonction nulle sur $\mathcal{D}$ et $\mathrm{Id}'_{\mathcal{D}}$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathcal{D}$.

Voyons maintenant un lien entre continuité et dérivabilité.

Proposition 6.6. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{D}$ qui est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a. En particulier, si f est dérivable sur une partie $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ alors elle est continue sur $\mathcal{D}'$.*

Remarque 6.7. *On a aussi une version "à droite" et une version "à gauche" de la proposition 6.6.*
Lorsque a est adhérent à $]a;+\infty[\cap\mathcal{D}$, on peut appliquer la proposition 6.6 à la restriction $f_{|[a;+\infty[\cap\mathcal{D}}$ de f à $[a;+\infty[\cap\mathcal{D}$. Cela donne l'implication : si f est dérivable en a à droite alors f est continue en a à droite.
Lorsque a est adhérent à $]-\infty;a]\cap\mathcal{D}$, on peut appliquer la proposition 6.6 à la restriction $f_{|]-\infty;a]\cap\mathcal{D}}$ de f à $]-\infty;a]\cap\mathcal{D}$. Cela donne l'implication : si f est dérivable en a à gauche alors f est continue en a à gauche.

Preuve de la proposition 6.6 : Par hypothèse, la propriété 1 de la proposition 6.1 est vraie. On sait que $\lim_{h\to 0} h = 0$ et, comme $\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$, on a, par produit (cf. proposition 4.32), $\lim_{h\to 0} h\eta(h) = 0$. Chacun des termes du membre de droite de l'égalité (6.1) a donc une limite en 0, à savoir $f(a)$, 0 et 0, respectivement. Par somme (cf. proposition 4.32), on en déduit que le membre de droite de (6.1) tend vers $f(a)$, ce qui démontre que f a une limite en a donc f est continue en a. $\square$

Attention : la réciproque est fausse. Une fonction continue en un point peut ne pas être dérivable en ce point. C'est ce qui se produit avec la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. On peut vérifier qu'elle est continue en 0, dérivable à droite en 0 de nombre dérivé à droite 1, dérivable à gauche en 0 de nombre dérivé à gauche -1, mais qu'elle n'est pas dérivable en 0.

Proposition 6.8. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Alors les fonctions $f+g$, $f\cdot g$ et λf sont dérivables sur $\mathcal{D}$ de dérivée $f'+g'$, $f'\cdot g+f\cdot g'$ et $\lambda f'$, respectivement.*
2. *Si, de plus, f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, alors $1/f$ est définie et dérivable sur $\mathcal{D}$, de dérivée $-f'/f^2$.*
3. *L'application $\overline{f} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$, est dérivable sur $\mathcal{D}$ et $(\overline{f})' = \overline{f'}$.*

Preuve : Soit $a \in \mathcal{D}$. Par hypothèse, a est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ et on sait que le 1 de la proposition 6.1 est vrai pour f et pour g. Il existe donc un voisinage U_1 de 0 et une fonction $\eta_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $h \in U_1$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on ait (6.1) avec η remplacée par η_1, c'est-à-dire

$$f(a+h) \;=\; f(a) \;+\; h\cdot f'(a) \;+\; h\cdot\eta_1(h)\,. \tag{6.2}$$

Il existe un voisinage U_2 de 0 et une fonction $\eta_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $h \in U_2$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on ait (6.1) avec f remplacée par g et η remplacée par η_2, c'est-à-dire

$$g(a+h) \ = \ g(a) \ + \ h \cdot g'(a) \ + \ h \cdot \eta_2(h) \, . \tag{6.3}$$

Soit $U_0 = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de 0 (cf. proposition 2.15). Pour $h \in U_0$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a donc, par (6.2),

$$(\lambda \cdot f)(a+h) \ = \ (\lambda \cdot f)(a) \ + \ h \cdot \big(\lambda \cdot f'(a)\big) \ + \ h \cdot (\lambda \cdot \eta_1)(h) \, ,$$

où la fonction $\lambda\eta_1$ tend vers 0 en 0 (cf. proposition 4.32). Donc λf est dérivable en a de nombre dérivée $\lambda f'(a)$.
Pour $h \in U_0$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on a, par (6.2) et (6.3),

$$(f \ + \ g)(a+h) \ = \ (f \ + \ g)(a) \ + \ h \cdot \big(f'(a) \ + \ g'(a)\big) \ + \ h \cdot (\eta_1 \ + \ \eta_2)(h) \, ,$$

où la fonction $\eta_1 + \eta_2$ tend vers 0 en 0 (cf. proposition 4.32). Donc $f + g$ est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a) + g'(a)$.
Pour $h \in U_0$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on a, par (6.2) et (6.3),

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(a+h) \ &= (f \cdot g)(a) \ + \ h \cdot \big(f'(a) \cdot g(a) \ + \ f(a) \cdot g'(a)\big) \\ &\quad + \ h \cdot \big(hf'(a)g'(a) \ + \ (g(a) \ + \ hg'(a))\eta_1(h) \ + \ (f(a) \ + \ hf'(a))\eta_2(h) \ + \ h\eta_1(h)\eta_2(h)\big) \, ,\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{h \to 0} \big(hf'(a)g'(a) \ + \ (g(a) \ + \ hg'(a))\eta_1(h) \ + \ (f(a) \ + \ hf'(a))\eta_2(h) \ + \ h\eta_1(h)\eta_2(h)\big) \ = \ 0 \, ,$$

d'après la proposition 4.32. Donc fg est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
On suppose de plus que f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$. Donc f ne s'annule pas en a. Comme f est dérivable en a, elle est continue en a (cf. proposition 6.6). Donc, par le corollaire 4.29, on a

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) \ = \ \lim_{x \to a} f(x) \ = \ f(a) \ \neq \ 0 \, .$$

Pour $h \in U_1$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on a, par (6.2),

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f}\right)(a+h) \ - \ \left(\frac{1}{f}\right)(a) \ &= \ - \ \frac{f(a+h) \ - \ f(a)}{f(a+h)f(a)} \ = \ -h \cdot \frac{f'(a) \ + \ \eta_1(h)}{f(a+h)f(a)} \\ &= \ - \ h \cdot \big(f'(a) \ + \ \eta_1(h)\big) \cdot \frac{1}{f(a)} \left(\frac{1}{f(a)} \ + \ \frac{1}{f(a+h)} \ - \ \frac{1}{f(a)}\right) \\ &= \ - \ h \cdot \frac{f'(a)}{f(a)^2} \ - \ h \cdot \left(\frac{\eta_1(h)}{f(a)^2} \ + \ \frac{f'(a) \ + \ \eta_1(h)}{f(a)} \cdot \left(\frac{1}{f(a+h)} \ - \ \frac{1}{f(a)}\right)\right)\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\eta_1(h)}{f(a)^2} \ + \ \frac{f'(a) \ + \ \eta_1(h)}{f(a)} \cdot \left(\frac{1}{f(a+h)} \ - \ \frac{1}{f(a)}\right)\right) \ = \ 0 \, ,$$

d'après la proposition 4.32. Donc $1/f$ est dérivable en a de nombre dérivé $-f'(a)/f(a)^2$.
Soit $a \in \mathcal{D}$. Comme f est dérivable en a, on a, pour $h \in U_1$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, d'après (6.2), $\overline{f}(a+h) = \overline{f}(a) \ + \ h \cdot \overline{f'(a)} \ + \ h \cdot \overline{\eta_1(h)}$. Comme η_1 tend vers 0 en 0, il en est de même de $|\eta_1|$ d'après (4.40). Or, $|\overline{\eta_1}| = |\eta_1|$, donc $\overline{\eta_1}$ tend aussi vers 0 en 0, par (4.40). Par la proposition 6.1, $\overline{f}$ est dérivable en a de dérivée $\overline{f'(a)}$. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathcal{D}$, on a montré le résultat annoncé. ☐

Dans le cadre de cette proposition 6.8, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $f/g = f \cdot (1/g)$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et on obtient, pour $a \in \mathcal{D}$,

$$(f/g)'(a) \ = \ f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} \ + \ f(a) \cdot \frac{-g'(a)}{g(a)^2} \ = \ \frac{f'(a)g(a) \ - \ f(a)g'(a)}{g(a)^2} \, . \tag{6.4}$$

On termine ce paragraphe par la composition.

Proposition 6.9. *Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux parties infinies de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_1$. Soit $f : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2$ une fonction réelle, qui est dérivable sur $\mathcal{D}'$, et $g : \mathcal{D}_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur l'image $f(\mathcal{D}')$ de $\mathcal{D}'$ par f. Alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathcal{D}'$ et, pour $a \in \mathcal{D}'$,*

$$(g \circ f)'(a) \;=\; g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)\,. \tag{6.5}$$

Preuve : Soit $a \in \mathcal{D}'$. On montrer que $g \circ f$ est dérivable en a. Comme f est dérivable en a, il existe un voisinage U_1 de 0 et une fonction $\eta_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $h \in U_1$ avec $a + h \in \mathcal{D}_1$, on ait (6.1) avec η remplacée par η_1, c'est-à-dire (6.2). Comme $a \in \mathcal{D}'$, $f(a) \in f(\mathcal{D}')$ et, comme g est dérivable sur $f(\mathcal{D}')$, g est dérivable en $f(a)$. Il existe donc un voisinage U_2 de 0 et une fonction $\eta_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $k \in U_2$ avec $f(a) + k \in \mathcal{D}_2$, on ait (6.1) avec a remplacée par $f(a)$, f remplacée par g et η remplacée par η_2, c'est-à-dire

$$g\big(f(a) + k\big) \;=\; g\big(f(a)\big) \,+\, k \cdot g'\big(f(a)\big) \,+\, k \cdot \eta_2(k)\,. \tag{6.6}$$

Soit $V_2 = \{t \in \mathbb{R}; t - f(a) \in U_2\}$. C'est un voisinage de $f(a)$. Comme f est dérivable en a, elle y est continue (cf. proposition 6.6). Donc, par le corollaire 4.29, on a

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) \;=\; \lim_{x \to a} f(x) \;=\; f(a)\,.$$

Il existe donc un voisinage U_1' de 0 tel que, pour $h \in U_1'$ avec $a + h \in \mathcal{D}_1$, on ait $f(a + h) \in V_2$. Soit $U_1'' = U_1 \cap U_1'$. C'est un voisinage de a (cf. proposition 2.15).
Pour $h \in U_1''$ avec $a + h \in \mathcal{D}_1$, on a $h \in U_1'$ donc $f(a + h) \in V_2$ et $k := f(a + h) - f(a) \in U_2$. On a aussi $f(a + h) \in \mathcal{D}_2$. Donc, par (6.6),

$$g\big(f(a + h)\big) \;=\; g\big(f(a) + k\big) \;=\; g\big(f(a)\big) \,+\, k \cdot g'\big(f(a)\big) \,+\, k \cdot \eta_2(k)\,.$$

Comme $h \in U_1$ et $a + h \in \mathcal{D}_1$, on a, par (6.2),

$$\begin{aligned} g\big(f(a + h)\big) \;&= g\big(f(a)\big) \,+\, h \cdot \big(f'(a) \,+\, \eta_1(h)\big) \cdot g'\big(f(a)\big) \,+\, k \cdot \eta_2(k) \\ &= g\big(f(a)\big) \,+\, h \cdot f'(a) \cdot g'\big(f(a)\big) \,+\, h \cdot \Big(g'\big(f(a)\big)\eta_1(h) \,+\, \big(f'(a) \,+\, \eta_1(h)\big)\eta_2\big(f(a + h) - f(a)\big)\Big)\,. \end{aligned}$$

D'après les propositions 4.28 et 4.32,

$$\lim_{h \to 0} \Big(g'\big(f(a)\big)\eta_1(h) \,+\, \big(f'(a) \,+\, \eta_1(h)\big)\eta_2\big(f(a + h) - f(a)\big)\Big) \;=\; 0$$

donc $g \circ f$ est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a) \cdot g'\big(f(a)\big)$. □

T.E.S.

6.2 Fonctions réelles dérivables et théorème des accroissements finis.

Dans ce paragraphe, on se penche sur les fonctions réelles dérivables. On s'intéresse aux extréma de telles fonctions. On montre ensuite le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis. On termine en justifiant le fait qu'une fonction dérivable de dérivée positive sur un intervalle est croissante sur cet intervalle.

Définition 6.10. *Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}$.*
On dit que f admet un maximum local en a s'il existe un voisinage U de a tel que $f(a)$ majore l'ensemble non vide $f(U \cap \mathcal{D}) = \{f(x); x \in U \cap \mathcal{D}\}$ (dans le sens de la définition 1.10). Dans ce cas, $f(a)$ est le maximum de $f(U \cap \mathcal{D})$ et est appelée valeur maximale locale de f.
On dit que f admet un minimum local en a s'il existe un voisinage U de a tel que $f(a)$ minore l'ensemble non vide $f(U \cap \mathcal{D}) = \{f(x); x \in U \cap \mathcal{D}\}$ (dans le sens de la définition 1.10). Dans ce cas, $f(a)$ est le minimum de $f(U \cap \mathcal{D})$ et est appelée valeur minimale locale de f.
Lorsque $f(a)$ majore $f(\mathcal{D})$, $f(a)$ est alors le maximum de $f(\mathcal{D})$ et on dit que f admet un maximum global

en a. Dans ce cas, $f(a)$ est appelée valeur maximale de f.
Lorsque $f(a)$ minore $f(\mathcal{D})$, $f(a)$ est alors le minimum de $f(\mathcal{D})$ et on dit que f admet un minimum global en a. Dans ce cas, $f(a)$ est appelée valeur minimale de f.
On dif que f admet un extrémum (resp. extrémum local) en a si elle admet un maximum (resp. maximum local) en a ou bien si elle admet un minimum (resp. minimum local) en a.

T.E.S

On remarque qu'un extrémum global est aussi un extrémum local (il suffit de prendre $\mathbb{R}$ comme voisinage de a). La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ admet un minimum global en 0. Elle n'admet aucun maximum local. La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = |x|$ si $x \in [-1; 1]$ et $g(x) = -|x|$ si $x \notin [-1; 1]$. Elle admet un minimum local en 0 mais n'a pas de minimum global. Elle admet de maxima locaux : en 1 et -1. Ces deux maxima sont en fait globaux.

Voyons maintenant l'influence de la dérivabilité sur les extréma locaux.

Proposition 6.11. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f admet un extrémum local en $a \in I$ et si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.*

Attention : Si, dans cette proposition 6.11, l'intervalle n'est pas ouvert, le résultat peut être faux. C'est le cas pour la fonction $\mathrm{Id} : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in [0; 1]$, associe x. Elle est dérivable sur $[0; 1]$ de dérivée constante égale à 1 sur $[0; 1]$. Elle admet un minimum global en 0 mais on a $\mathrm{Id}'(0) = 1 \neq 0$.
Dans le cadre de la proposition 6.11, un point a qui vérifie $f'(a) = 0$ (on appelle cela un point critique de f), n'est pas forcément un extrémum de f. C'est le cas pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\mathbb{R} \ni x \mapsto 3x^2$. Le point 0 est un point critique de f puisque $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. Mais 0 n'est pas un extrémum local de f.

Preuve de la proposition 6.11 : Soit $a \in I$ un extrémum local de f. Comme I est un intervalle ouvert, a est adhérent aux ensembles $I_a^+ =]a; +\infty[\cap I$ et $I_a^- =]-\infty; a[\cap I$.

a). On suppose que a est un maximum local de f. Il existe donc un voisinage U de a tel que $f(a)$ majore $f(U \cap I)$. En particulier, pour $x \in U \cap I_a^+$, on a $x - a > 0$ et $f(x) \leq f(a)$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à droite en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.36), on obtient $f'(a) \leq 0$.
Comme $f(a)$ majore $f(U \cap I)$, on a aussi, pour $x \in U \cap I_a^-$, $x - a < 0$ et $f(x) \leq f(a)$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à gauche en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.36), on obtient $f'(a) \geq 0$.
Conclusion : $f'(a) = 0$.

b). On suppose que a est un minimum local de f. Il existe donc un voisinage U de a tel que $f(a)$ minore $f(U \cap I)$. En particulier, pour $x \in U \cap I_a^+$, on a $x - a > 0$ et $f(x) \geq f(a)$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à droite en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf.

proposition 4.36), on obtient $f'(a) \geq 0$.
Comme $f(a)$ minore $f(U \cap I)$, on a aussi, pour $x \in U \cap I_a^-$, $x - a < 0$ et $f(x) \geq f(a)$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à gauche en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.36), on obtient $f'(a) \leq 0$.
Conclusion : $f'(a) = 0$. □

Cette proposition 6.11 va nous permettre de démontrer un cas particulier du futur théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.14), à savoir :

T.E.S.

Théorème 6.12. Théorème de Rolle.
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, et qui vérifie $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

En particulier, pour une fonction dérivable (donc continue), il existe un point critique entre de points prenant la même valeur par f. Pour préparer la preuve de ce théorème 6.12, on le montre dans un cas particulier.

Lemme 6.13. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, et qui vérifie $g(a) = g(b) = 0$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$.*

Preuve : Soit $m_+ = \sup g([a;b])$ et $m_- = \inf g([a;b])$. Comme g est continue, on sait, d'après le théorème 5.3, m_+ et m_- sont réelles et sont des valeurs de g. Comme $g(a) = 0$, on a $m_- \leq 0 \leq m_+$.

a). Cas où $m_- = 0 = m_+$. Par définition des bornes supérieure et inférieure, g est nulle. Sa dérivée est donc nulle aussi. Tout point $c \in]a;b[$ vérifie $g'(c) = 0$.

b). Cas où $0 < m_+$. Soit $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = m_+$. Comme $g(a) = 0 < m_+$ et $g(b) = 0 < m_+$, c est différent de a et de b, donc $c \in]a;b[$. De plus, g admet un maximum (local) en c et, comme g est dérivable sur $]a;b[$, g est dérivable en c. Par la proposition 6.11, $g'(c) = 0$.

c). Cas où $m_- < 0$. Soit $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = m_-$. Comme $g(a) = 0 > m_-$ et $g(b) = 0 > m_-$, c est différent de a et de b, donc $c \in]a;b[$. De plus, g admet un minimum (local) en c et, comme g est dérivable sur $]a;b[$, g est dérivable en c. Par la proposition 6.11, $g'(c) = 0$. □

Preuve du théorème 6.12 : Soit $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - f(a)$. Par hypothèse, f est continue sur $[a;b]$ et la fonction constante égale à $-f(a)$ y est aussi continue. Par somme (cf. proposition 4.32), g est continue sur $[a;b]$. Par hypothèse, f est dérivable sur $]a;b[$ et la fonction constante égale à $-f(a)$ y est aussi dérivable. Par somme (cf. proposition 6.8), g est dérivable sur $]a;b[$ et $g' = f' - 0 = f'$. De plus, comme $f(a) = f(b)$, on a $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ et $g(b) = f(b) - f(a) = 0$. Par le lemme 6.13, il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$. Comme $g' = f'$, on a aussi $f'(c) = 0$. □

On établit maintenant la généralisation suivante du théorème de Rolle.

Théorème 6.14. Théorème des accroissements finis.
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

T.E.S

Si l'on applique ce théorème dans le cas où $f(a) = f(b)$, on trouve un point $c \in]a;b[$ tel que $f'(c)(b-a) = 0$. Comme $a \neq b$, on en déduit que $f'(c) = 0$, c'est-à-dire le résultat du théorème de Rolle.

Preuve du théorème 6.14 : Soit $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) \;=\; f(x) \;-\; \left(f(a) \;+\; \frac{f(b) \;-\; f(a)}{b-a} \cdot (x-a) \right) .$$

D'après la proposition 4.32, g est continue sur $[a;b]$. D'après la proposition 6.8, g est dérivable sur $]a;b[$ et, pour $x \in]a;b[$,

$$g'(x) \;=\; f'(x) \;-\; \frac{f(b) \;-\; f(a)}{b-a} .$$

De plus,

$$\begin{aligned} g(b) \;&=\; f(b) \;-\; \left(f(a) \;+\; \frac{f(b) \;-\; f(a)}{b-a} \cdot (b-a) \right) \;=\; f(b) \;-\; \big(f(a) \;+\; f(b) \;-\; f(a) \big) \;=\; 0 \,, \\ g(a) \;&=\; f(a) \;-\; \left(f(a) \;+\; \frac{f(b) \;-\; f(a)}{b-a} \cdot (a-a) \right) \;=\; f(a) \;-\; f(a) \;=\; 0 \,. \end{aligned}$$

Par le théorème de Rolle (cf. théorème 6.12) appliqué à g, il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a donc

$$0 \;=\; f'(c) \;-\; \frac{f(b) \;-\; f(a)}{b-a}$$

et donc $(b-a)f'(c) = f(b) - f(a)$. $\square$

On peut maitenant démontrer le résultat suivant qui permet de dresser le tableau de variations d'une fonction dérivable lorsqu'on connait le signe de sa dérivée.

Corollaire 6.15. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ (en particulier $\inf I < \sup I$). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, qui est dérivable sur $]\inf I; \sup I[$.*

1. *Si f' est positive sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est croissante sur I.*
2. *Si f' est strictement positive sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est strictement croissante sur I.*
3. *Si f' est négative sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est décroissante sur I.*
4. *Si f' est strictement négative sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est strictement décroissante sur I.*
5. *Si f' est nulle sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est constante sur I.*

Remarque 6.16. *Insistons sur ce que dit ce résultat.*
Si, par exemple, $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, dérivable sur $]a;b[$ de dérivée positive, alors f est croissante sur $[a;b]$. En particulier, pour $x \in [a;b]$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, même si $f'(a)$ n'est pas défini, même si $f'(b)$ n'est pas défini.
Pour dresser le tableau des variations d'une fonction dérivable sur des intervalles, on utilise souvent ce corollaire 6.15 en conjonction avec le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1) ou son corollaire (cf. corollaire 5.2) ou encore avec le théorème de Heine (cf. théorème 5.3).

Preuve du corollaire 6.15 : Soit $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$. Par hypothèse, on sait que f est continue sur $[x_-; x_+]$, dérivable sur $]x_-; x_+[$, donc, par le théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.14), il existe $c \in]x_-; x_+[$, tel que $f(x_+) - f(x_-) = f'(c)(x_+ - x_-)$. On a $c \in]\inf I; \sup I[$.

1. On suppose que f' est positive sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) \geq 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) \geq f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ et aussi lorsque $x_+ = x_-$. Donc f est croissante sur I.

T.E.S.

2. On suppose que f' est strictement positive sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) > 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) > f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ donc f est strictement croissante sur I.
3. On suppose que f' est négative sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) \leq 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) \leq f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ et aussi lorsque $x_+ = x_-$. Donc f est décroissante sur I.
4. On suppose que f' est strictement négative sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) < 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) < f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ donc f est strictement décroissante sur I.

T.E.S.

5. On suppose que f' est nulle sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) = 0$ et $f(x_+) = f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ donc f est constante sur I. □

6.3 Classes de fonctions.

On se place de nouveau dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On introduit des classes de régularité pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

6.3.1 Classes C^0 et C^1.

Définition 6.17. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté par $C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$.*

Proposition 6.18. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.*
L'ensemble $C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^{\mathcal{D}}; +; \cdot)$. En particulier, si $(f; g) \in (C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K}))^2$ alors $f + g \in C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$ et, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f \in C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$.
Pour $(f; g) \in (C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K}))^2$, le produit fg appartient à $C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$.
Si $f \in C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$ et f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, alors $(1/f)$ est bien définie sur $\mathcal{D}$ et $(1/f) \in C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$.
Si $f \in C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$ alors $\overline{f}$ appartient à $C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$.
Si $\mathcal{D}'$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $h : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$ avec $h \in C^0(\mathcal{D}'; \mathbb{K})$, et si $g \in C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$, alors $g \circ h$, la composée de g par h appartient à $C^0(\mathcal{D}'; \mathbb{K})$.

Preuve : On a vu que la fonction nulle sur $\mathcal{D}$ est continue. Elle appartient donc à $C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$. D'après la proposition 4.32, la somme de deux éléments de $C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$ est encore dans $C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$, le produit d'un scalaire de $\mathbb{K}$ par un élément de $C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$ est encore dans $C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$. Donc $C^0(\mathcal{D}; \mathbb{K})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$.
Les deux propriétés suivantes sont une reformulation du 5 de la proposition 4.32.
L'avant-dernière propriété est une conséquence du corollaire 4.34.
Le dernier résultat est une conséquence immédiate de la proposition 4.28. □

Définition 6.19. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions, à valeurs dans $\mathbb{K}$, définies et dérivables sur $\mathcal{D}$, dont la dérivée est continue sur $\mathcal{D}$, est noté par $C^1(\mathcal{D}; \mathbb{K})$.*

Proposition 6.20. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$.*
L'ensemble $C^1(I; \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. En particulier, si $(f; g) \in (C^1(I; \mathbb{K}))^2$ alors $f + g \in C^1(I; \mathbb{K})$ et, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f \in C^1(I; \mathbb{K})$.
On a l'inclusion $C^1(I; \mathbb{K}) \subset C^0(I; \mathbb{K})$.
Pour $(f; g) \in (C^1(I; \mathbb{K}))^2$, le produit fg appartient à $C^1(I; \mathbb{K})$.
Si $f \in C^1(I; \mathbb{K})$ et f ne s'annule pas sur I, alors $(1/f)$ est bien définie sur I et $(1/f) \in C^1(I; \mathbb{K})$.

Si $f \in C^1(I;\mathbb{K})$ alors $\overline{f}$ appartient à $C^1(I;\mathbb{K})$.
Si I' un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $h : I' \longrightarrow I$ avec $h \in C^1(I';\mathbb{K})$, et si $g \in C^1(I;\mathbb{K})$, alors $g \circ h$, la composée de g par h appartient à $C^1(I';\mathbb{K})$.

Preuve : On a vu que la fonction nulle sur I est dérivable sur I de dérivée nulle, donc continue sur I. Elle appartient donc à $C^1(I;\mathbb{K})$. D'après la proposition 6.8, la somme de deux éléments de $C^1(I;\mathbb{K})$ est encore dans $C^1(I;\mathbb{K})$, le produit d'un scalaire de $\mathbb{K}$ par un élément de $C^1(I;\mathbb{K})$ est encore dans $C^1(I;\mathbb{K})$. Donc $C^1(I;\mathbb{K})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.
Soit $g \in C^1(I;\mathbb{K})$. Par définition, g est donc dérivable sur I. D'après la proposition 6.6, g est continue sur I donc $g \in C^0(I;\mathbb{K})$. On a bien $C^1(I;\mathbb{K}) \subset C^0(I;\mathbb{K})$.
Soit $(f;g) \in (C^1(I;\mathbb{K}))^2$. D'après la proposition 6.8, fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$. Par définition de $C^1(I;\mathbb{K})$, $f' \in C^0(I;\mathbb{K})$ et $g' \in C^0(I;\mathbb{K})$. D'après $C^1(I;\mathbb{K}) \subset C^0(I;\mathbb{K})$, $f \in C^0(I;\mathbb{K})$ et $g \in C^0(I;\mathbb{K})$. Par la proposition 6.18, $f'g + fg' \in C^0(I;\mathbb{K})$ donc $(fg)' \in C^0(I;\mathbb{K})$. On a montré que $(fg) \in C^1(I;\mathbb{K})$.
Soit $f \in C^1(I;\mathbb{K})$ telle que f ne s'annule pas sur I. D'après la proposition 6.8, $1/f$ est dérivable sur I et $(1/f)' = -f'/f^2$. On a $f' \in C^0(I;\mathbb{K})$ et, d'après $C^1(I;\mathbb{K}) \subset C^0(I;\mathbb{K})$, $f \in C^0(I;\mathbb{K})$. Par la proposition 6.18, $-f'/f^2 \in C^0(I;\mathbb{K})$ soit $(1/f)' \in C^0(I;\mathbb{K})$. On a montré que $(1/f) \in C^1(I;\mathbb{K})$.
Soit $f \in C^1(I;\mathbb{K})$. D'après la proposition 6.8, $\overline{f}$ est dérivable sur I et $(\overline{f})' = \overline{f'}$ sur I. Comme f' est continue sur I, on a la continuité de $(\overline{f})'$ sur I par le corollaire 4.34. Donc $\overline{f} \in C^1(I;\mathbb{K})$.
Soit $h : I' \longrightarrow I$ de classe C^1 sur I' et $g \in C^1(I;\mathbb{K})$. Par la proposition 6.9, $g \circ h$ est dérivable et $(g \circ h)' = (g' \circ h) \cdot h'$. Par hypothèse, on a $g' \in C^0(I;\mathbb{K})$ et $h' \in C^0(I';\mathbb{K})$. Comme $C^1(I';\mathbb{K}) \subset C^0(I';\mathbb{K})$, $h \in C^0(I';\mathbb{K})$. Par la proposition 6.18, $(g' \circ h) \cdot h' \in C^0(I';\mathbb{K})$ donc $(g \circ h)' \in C^0(I';\mathbb{K})$. On a montré que $(g \circ h) \in C^1(I';\mathbb{K})$. □

Voici une famille d'exemples de fonctions de classe C^1.

Définition 6.21. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par, pour $x \in I$, $f_n(x) = x^n$. On a $f_n \in \mathbb{K}^I$. On note par $P(I;\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$ engendrée par la famille $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$. C'est l'espace des fonctions polynômiales sur I à coefficients dans $\mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

On rappelle que $P(I;\mathbb{K})$ est le plus petit $\mathbb{K}$-espace vectoriel contenant l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$. Comme $\mathbb{K}^I$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel contenant l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$, $P(I;\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. Un élément de $P(I;\mathbb{K})$ est donc une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $(i_1; \cdots; i_p) \in \mathbb{N}^p$, $(\lambda_1; \cdots; \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \ = \ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot f_{i_k}(x) \, .$$

Si $d = \max\{i_k; k \in [\![1;p]\!]\}$, on peut trouver $(a_0; \cdots; a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tel que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot f_k(x) \ = \ \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot x^k \, .$$

Proposition 6.22. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $P(I;\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I;\mathbb{K})$ (et donc aussi de $C^0(I;\mathbb{K})$). De plus, $f_0' = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n' = nf_{n-1}$.*

Preuve : Comme la fonction f_0 est la fonction constante égale à 1 sur I et comme on a vu qu'une fonction constante sur un intervalle est C^1 sur cet intervalle de dérivée nulle, $f_0 \in C^1(I;\mathbb{K})$ et $f_0' = 0$. Comme f_1 est la fonction identité sur I, elle y est dérivable de dérivée constante égale à 1 donc elle est aussi de classe C^1 sur I de $f_1' = f_0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) = (f_n \in C^1(I;\mathbb{K}) \, \text{et} \, f_n' = nf_{n-1})$. Comme $f_1 \in C^1(I;\mathbb{K})$ et $f_1' = f_0 = 1 \cdot f_0$, $\mathcal{P}(1)$

est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_{n+1} = f_1 \cdot f_n$, comme $f_1 \in C^1(I;\mathbb{K})$, comme $f_n \in C^1(I;\mathbb{K})$ par hypothèse de récurrence, on déduit de la proposition 6.8 que $f_{n+1} \in C^1(I;\mathbb{K})$ et que

$$f'_{n+1} \; = \; f'_1 \cdot f_n \, + \, f_1 \cdot f'_n \; = \; f_n \, + \, n \cdot f_1 \cdot f_{n-1} \; = \; (n+1) \cdot f_n \, .$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $C^1(I;\mathbb{K})$ contient donc l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$. Par définition de $P(I;\mathbb{K})$, $P(I;\mathbb{K})$ est donc un sous-espace vectoriel de $C^1(I;\mathbb{K})$. □.

6.3.2 Classes C^N, pour N entier naturel ou infini.

On introduit maintenant des classes de régularités supérieures à C^1. Pour un intervalle non réduit à un point I de $\mathbb{R}$, on va construire par récurrence une suite $(C^n(I;\mathbb{K}))_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels de $C^0(I;\mathbb{K})$. En particulier, on retrouvera l'espace $C^1(I;\mathbb{K})$ introduit dans le paragraphe précédent.

Proposition 6.23. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Il existe une suite $C = (C^n(I;\mathbb{K}))_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels de $C^0(I;\mathbb{K})$, de premier terme $C^0(I;\mathbb{K})$ et vérifiant la relation de récurrence :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \, , \quad C^n(I;\mathbb{K}) \; = \; \big\{ f \in \mathbb{K}^I \, ; \; f \text{ est dérivable et } f' \in C^{n-1}(I;\mathbb{K}) \big\} \, . \tag{6.7}$$

Preuve : Voir le paragraphe 9.2.3. □

On note que la définition de $C^1(I;\mathbb{K})$ donnée par cette proposition 6.23 est identique à celle donnée dans la définition 6.19 avec $\mathcal{D} = I$. On montre que la suite $(C^n(I;\mathbb{K}))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Proposition 6.24. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. La suite $C = (C^n(I;\mathbb{K}))_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels de $C^0(I;\mathbb{K})$, de premier terme $C^0(I;\mathbb{K})$ et vérifiant la relation de récurrence* (6.7) *est décroissante, i.e.*

$$\forall\, (m;n) \in \mathbb{N}^2 \, , \quad \big(m \geq n \implies C^m(I;\mathbb{K}) \; \subset \; C^n(I;\mathbb{K}) \big) \, . \tag{6.8}$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n) = (C^{n+1} \subset C^n)$.
Par la proposition 6.20, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in C^{n+2}$. Par définition, f est dérivable et $f' \in C^{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, $f' \in C^n$. Comme f est dérivable et $f' \in C^n$, $f \in C^{n+1}$, par définition de C^{n+1}. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour prouver (6.8), on montre par récurrence la proposition $\mathcal{Q}(q)$ donnée, pour $q \in \mathbb{N}$, par

$$\mathcal{Q}(q) \; = \; \big(\forall p \in \mathbb{N} \, , \quad C^{p+q} \; \subset \; C^p \big) \, .$$

$\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(q)$ soit vraie pour un $q \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à $p+1$, on a $C^{p+q+1} = C^{(p+1)+q} \subset C^{p+1}$. D'après $\mathcal{P}(p)$, $C^{p+1} \subset C^p$. Donc $C^{p+q+1} \subset C^p$. Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(q+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.
Soit $(m;n) \in [\![n_0; +\infty [\![^2$ avec $m \geq n$. Comme $\mathcal{Q}(m-n)$ est vraie, on a $C^m = C^{n+(m-n)} \subset C^n$. On a montré (6.8). □

Définition 6.25. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. On pose*

$$C^\infty(I;\mathbb{K}) \; := \; \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(I;\mathbb{K}) \, .$$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, *on dit que* f *est (de classe)* C^n *sur* I *si* $f \in C^n(I;\mathbb{K})$.
On dit que f *est (de classe)* C^∞ *sur* I *si* $f \in C^\infty(I;\mathbb{K})$.

Proposition 6.26. *Soit* I *un intervalle non réduit à un point de* $\mathbb{R}$.

1. *L'ensemble* $C^\infty(I;\mathbb{K})$ *est un sous-espace vectoriel de* $C^0(I;\mathbb{K})$.
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $C^\infty(I;\mathbb{K}) \subset C^n(I;\mathbb{K})$.
3. *La formule* (6.7) *est encore valable pour* n *remplacé par* $+\infty$ *avec la convention* $+\infty - 1 = +\infty$ *:*

$$C^\infty(I;\mathbb{K}) \;=\; \left\{ f \in \mathbb{K}^I \,;\; f \text{ est dérivable et } f' \in C^\infty(I;\mathbb{K}) \right\} . \tag{6.9}$$

Preuve : Comme $C^\infty(I;\mathbb{K})$ est une intersection de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Par sa définition, $C^\infty(I;\mathbb{K})$ est contenu dans chaque $C^k(I;\mathbb{K})$, pour $k \in \mathbb{N}$, et en particulier dans $C^0(I;\mathbb{K})$. Il reste à montrer (6.9). On note par $\mathcal{E}$ l'ensemble à droite dans l'égalité (6.9).
Soit $g \in C^\infty(I;\mathbb{K})$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par définition de $C^\infty(I;\mathbb{K})$, $g \in C^k(I;\mathbb{K})$. D'après (6.7), g est dérivable et $g' \in C^{k-1}(I;\mathbb{K})$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$g' \;\in\; \bigcap_{k=1}^{\infty} C^{k-1}(I;\mathbb{K}) \;=\; \bigcap_{\ell=0}^{\infty} C^{\ell}(I;\mathbb{K}) \;=\; C^\infty(I;\mathbb{K}) \,.$$

Donc $g \in \mathcal{E}$. On a montré que $C^\infty(I;\mathbb{K}) \subset \mathcal{E}$.
Soit $g \in \mathcal{E}$. On a donc g dérivable et $g' \in C^\infty(I;\mathbb{K})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition de $C^\infty(I;\mathbb{K})$, $g' \in C^k(I;\mathbb{K})$ donc, par (6.7), $g \in C^{k+1}(I;\mathbb{K})$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$g \;\in\; \bigcap_{k=0}^{\infty} C^{k+1}(I;\mathbb{K}) \;=\; \bigcap_{\ell=1}^{\infty} C^{\ell}(I;\mathbb{K}) \,.$$

Comme g est dérivable, elle est continue, par la proposition 6.6. Donc $g \in C^0(I;\mathbb{K})$. D'où

$$g \;\in\; C^0(I;\mathbb{K}) \;\bigcap\; \left(\bigcap_{\ell=1}^{\infty} C^{\ell}(I;\mathbb{K}) \right) \;=\; \bigcap_{\ell=0}^{\infty} C^{\ell}(I;\mathbb{K}) \;=\; C^\infty(I;\mathbb{K}) \,.$$

On a montré que $\mathcal{E} \subset C^\infty(I;\mathbb{K})$.
On a donc montré (6.9). □

Pour une fonction $f \in C^N(I;\mathbb{K})$ avec $N \in (\mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$, on voudrait définir la suite (éventuellement finie) de ses dérivées successives, tant qu'elles existent : dérivée (première), dérivée seconde = dérivée de la dérivée, dérivée troisième = dérivée de la dérivée de la dérivée, etc .... Afin d'inclure le cas $N = 0$, on décide qu'une fonction est aussi sa dérivée 0ième. On va procéder par récurrence. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 6.27. *Soit* I *un intervalle non réduit à un point de* $\mathbb{R}$, $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ *et* $f \in C^N(I;\mathbb{K})$. *Soit* $D_N := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N\}$. *Il existe une unique application* $d : D_N \longrightarrow C^0(I;\mathbb{K})$ *telle que* $d(0) = f$ *et*

$$\forall\, n \in \left(\mathbb{N}^* \cap D_N\right) , \quad \Big(d(n) \;=\; \big(d(n-1)\big)' \quad \text{et} \quad d(n) \;\in\; C^{N-n}(I;\mathbb{K}) \Big) \,, \tag{6.10}$$

avec la convention selon laquelle, pour $n \in \mathbb{N}$, $\infty - n = \infty$. *Ici "*$(g)'$*" désigne la dérivée d'une fonction dérivable* $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

Preuve : Voir le paragraphe 9.2.4. □

Définition 6.28. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ et $f \in C^N(I;\mathbb{K})$. Soit $D_N := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N\}$. Pour $n \in D_N$, on appelle dérivée nième de f sur I la fonction $d(n) \in C^{N-n}(I;\mathbb{K})$ construite dans la proposition 6.27. On la note $f^{(n)}$.*
On a donc $f^{(0)} = f$ et

$$\forall\, n \in \left(\mathbb{N}^* \cap D_N\right), \quad \left(f^{(n)} \;=\; \left(f^{(n-1)}\right)' \quad et \quad f^{(n)} \;\in\; C^{N-n}(I;\mathbb{K})\right), \tag{6.11}$$

Il est commode de pouvoir repérer les fonctions de classe C^N sur I (pour un $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) en appliquant successivement l'opération de dérivation en partant de f. C'est ce que donne le résultat suivant.

Proposition 6.29. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On considère les propositions*

$$\mathcal{D}(p) \;:=\; \left(\exists\, (g_0;\cdots;g_{p-1};g_p) \in \left(C^1(I;\mathbb{K})\right)^p \times C^0(I;\mathbb{K})\,;\; \left(g_0 \;=\; f\right) \; et \; \left(\forall j \in [\![0;p-1]\!]\,,\, g'_j \;=\; g_{j+1}\right)\right)$$

et

$$\mathcal{E}(p) \;:=\; \left(\left(f \in C^p(I;\mathbb{K})\right) \quad et \quad \left(\forall j \in [\![0;p]\!]\,,\, f^{(j)} = g_j\right)\right).$$

On a l'implication : $(\mathcal{D}(p) \Longrightarrow \mathcal{E}(p))$.

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ soit $\mathcal{P}(p) = (\forall f \in \mathbb{K}^I, \mathcal{D}(p) \Longrightarrow \mathcal{E}(p))$.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$. Supposons $\mathcal{D}(1)$ vraie. Il existe donc $g_0 \in C^1$ et $g_1 = g'_0 \in C^0$. De plus $f = g_0$. Donc f est dérivable et $f' = g_1 \in C^0$. Par (6.7) avec $n = 1$, $f \in C^1$ et $\mathcal{E}(1)$ est vraie. On a montré $\mathcal{P}(1)$.
Supposons $\mathcal{P}(p)$ pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathbb{K}^I$. On suppose $\mathcal{D}(p+1)$ vraie. Il existe donc $(g_0;\cdots;g_p) \in (C^1)^p$ et $g_{p+1} \in C^0$ telles que $g_0 = f$ et, pour $j \in [\![0;p]\!]$, $g'_j = g_{j+1}$. Comme $C^1 \subset C^0$, $\mathcal{D}(p)$ vraie. Par l'hypothèse de récurrence, $f \in C^p$ et, $j \in [\![0;p]\!]$, $f^{(j)} = g_j$. Donc $f' = g_1$ et, en prenant les fonctions $g_1;\cdots;g_{p+1}$, on voit que $\mathcal{D}(p)$ est vraie avec f remplacée par f'. Par l'hypothèse de récurrence avec f remplacée par f', $f' \in C^p$. Par (6.7), $f \in C^{p+1}$. De plus, $f^{(p+1)} = (f^{(p)})' = (g_p)' = g_{p+1}$. On a montré $\mathcal{E}(p+1)$.
Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et toute $f \in \mathbb{K}^I$, l'implication $(\mathcal{D}(p) \Longrightarrow \mathcal{E}(p))$ est vraie. $\square$

Remarque 6.30. *Prenons la fonction nulle sur un intervalle I, notée f. On sait qu'elle y est continue, dérivable de dérivée nulle. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $(g_0;\cdots;g_{p-1};g_p) = (f;\cdots;f) \in \left(C^1(I;\mathbb{K})\right)^p \times C^0(I;\mathbb{K})$, la propriété $\mathcal{D}(p)$ de la proposition 6.29 est vraie donc $\mathcal{E}(p)$ est aussi vraie. Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction nulle appartient à $C^\infty(I;\mathbb{K})$, d'après la définition 6.25, et ses dérivées successives sont nulles (i.e. égales à f).*

Pour une fonction $f \in C^\infty(I;\mathbb{K})$, par exemple, on obtient donc ses dérivées de proche en proche : $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = (f')'$ notée aussi f'', $f^{(3)} = ((f')')' = (f'')'$, etc ... On vérifie que $f^{(3)}$ est aussi $(f')^{(2)}$. On va voir que c'est un fait général.

Proposition 6.31. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $(p;q) \in \mathbb{N}^2$. On considère les propositions $\mathcal{P}_1 = (f \in C^p(I;\mathbb{K})$ et $f^{(p)} \in C^q(I;\mathbb{K}))$, $\mathcal{P}_2 = (f \in C^{p+q}(I;\mathbb{K}))$ et*

$$\mathcal{P}_3 = \left(f \in C^p(I;\mathbb{K}) \text{ et } f^{(p)} \in C^q(I;\mathbb{K}) \text{ et } (f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}\right).$$

On a les implications : $\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2 \Longrightarrow \mathcal{P}_3$.
Comme $\mathcal{P}_3$ implique $\mathcal{P}_1$, on a $\mathcal{P}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{P}_2$ et, quand l'une des deux est vraie, les deux sont vraies et on a $(f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}$.

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n. Pour $q \in \mathbb{N}$ soit

$$\mathcal{Q}(q) \;:=\; \left(\forall\, f \in \mathbb{K}^I\,,\, \forall\, p \in \mathbb{N}\,, \quad \left(\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2\right) \quad \text{et} \quad \left(\mathcal{P}_2 \Longrightarrow \mathcal{P}_3\right)\right).$$

Pour $q = 0$, l'implication $\big(\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2\big)$ s'écrit

$$\big(f \in C^p \text{ et } f^{(p)} \in C^0\big) \implies \big(f \in C^{p+0}\big) .$$

Elle est vraie. Toujours pour $q = 0$, l'implication $\big(\mathcal{P}_2 \Longrightarrow \mathcal{P}_3\big)$ s'écrit

$$\big(f \in C^{p+0}\big) \implies \big(f \in C^p \text{ et } f^{(p)} \in C^0 \text{ et } (f^{(p)})^{(0)} = f^{(p+0)}\big) .$$

Elle est aussi vraie, d'après la proposition 6.27. Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{Q}(q)$ vraie pour un $q \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}$.
On montre l'implication $\big(\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2\big)$ avec q remplacé par $q+1$. On suppose $f \in C^p$ et $f^{(p)} \in C^{q+1}$. Par (6.7) avec $n = q+1$, $f^{(p)}$ est dérivable et $(f^{(p)})' \in C^q$. En prenant les fonctions $g_j = f^{(j)} \in C^1$, pour $j \in [\![0; p]\!]$, et $g_{p+1} = (f^{(p)})' \in C^0$, la proposition $\mathcal{D}(p+1)$ de proposition 6.29 est vraie. On obtient donc, par cette proposition 6.29, que $f \in C^{p+1}$. Comme $f' = f^{(1)} = g_1$ et $\mathcal{D}(p+1)$ est vraie, la proposition $\mathcal{D}(p)$, avec f remplacée par f' et $(g_0; \cdots ; g_p)$ remplacé par $(g_1; \cdots ; g_{p+1})$, est vraie. Donc, encore par la proposition 6.29, $f' \in C^p$ et $(f')^{(p)} = g_{p+1} = (f^{(p)})' \in C^q$. Par l'hypothèse de récurrence pour f', on a $f' \in C^{p+q}$. Par définition de C^{p+q+1} (cf. (6.7)), on obtient $f \in C^{p+q+1}$. On a montré $\big(\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2\big)$ avec q remplacé par $q+1$.
On montre l'implication $\big(\mathcal{P}_2 \Longrightarrow \mathcal{P}_3\big)$ avec q remplacé par $q+1$. On suppose que $f \in C^{p+(q+1)}$. Comme $f \in C^{(p+1)+q}$, on sait, par la seconde implication de $\mathcal{Q}(q)$, que $f \in C^{p+1}$ et $f^{(p+1)} \in C^q$ et $(f^{(p+1)})^{(q)} = f^{((p+1)+q)}$. Donc $f^{(p)}$ est dérivable et $(f^{(p)})' = f^{(p+1)} \in C^q$. Par (6.7) avec $n = q+1$, $f^{(p)} \in C^{q+1}$. De plus,

$$f^{(p+(q+1))} = f^{((p+1)+q)} = \big(f^{(p+1)}\big)^{(q)} = \Big(\big(f^{(p)}\big)'\Big)^{(q)} = \big(f^{(p)}\big)^{(q+1)}$$

d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{Q}(q)$ appliquée à $f^{(p)}$. On a montré $\big(\mathcal{P}_2 \Longrightarrow \mathcal{P}_3\big)$ avec q remplacé par $q+1$.
Donc $\mathcal{Q}(q+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$. ☐

Comme les ensembles $C^N(I; \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^I$, on sait que la somme de deux fonctions de classe C^N est de classe C^N et le produit d'une fonction de classe C^N par un élément de $\mathbb{K}$ est aussi de classe C^N. Qu'en est-il d'autres opérations ? C'est l'objet du résultat suivant.

Proposition 6.32. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ et $D_N := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N\}$. Soit $(f; g) \in (C^N(I; \mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *On sait déjà que $(f + \lambda g) \in C^N(I; \mathbb{K})$ (cf. propostion 6.23). Pour tout $n \in D_N$, sa dérivée nième est $f^{(n)} + \lambda g^{(n)}$.*

2. *Le produit fg appartient à $C^N(I; \mathbb{K})$ et, pour tout $n \in D_N$, sa dérivée nième est donnée par la formule de Leibnitz suivante :*

$$\big(f \cdot g\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} , \tag{6.12}$$

   où, pour $0 \leq k \leq n$, les C_k^n sont les coefficients du binôme de Newton définis par

$$C_k^n = \frac{n!}{(k!) \cdot ((n-k)!)} \quad \text{et aussi notés par} \quad \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} .$$

3. *Si, de plus, f ne s'annule pas sur I, alors $1/f$ est bien définie sur I et $(1/f) \in C^N(I; \mathbb{K})$.*

4. *La fonction conjuguée $\overline{f}$ appartient à $C^N(I; \mathbb{K})$ et, pour tout $n \in D_N$, sa dérivée nième est $\overline{f^{(n)}}$.*

5. *Si J un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $h : J \longrightarrow I$ et $h \in C^N(J; \mathbb{K})$ alors la composée $g \circ h$ de g par h est de classe C^N sur J.*

Preuve : Tout d'abord, on remarque que, pour $(k;n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$, on a les propriétés $C_k^n = C_{n-k}^n$, $C_n^n = C_0^n = 1$ et, pour $k \geq 1$, $C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$.
Soit I et J deux intervalles non réduits à un point de $\mathbb{R}$. On rappelle que, pour $n \leq N$, $C^N(I;\mathbb{K}) \subset C^n(I;\mathbb{K})$ et $C^N(J;\mathbb{K}) \subset C^n(J;\mathbb{K})$, d'après les propositions 6.24 et 6.26.
Pour $n \in D_N$, soit $\mathcal{S}(n)$ la proposition : $((f+\lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)})$.
$\mathcal{S}(0)$ est vraie car, par définition, $(f+\lambda g)^{(0)} = f + \lambda g = f^{(0)} + \lambda g^{(0)}$.
Supposons $\mathcal{S}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \leq N-1$ (avec la convention $N-1 = +\infty$ si $N = +\infty$). On a $(f+\lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}$. Puisque $n+1 \leq N$, $(f+\lambda g)^{(n)}$ est dérivable (cf. (6.11)) et, par la proposition 6.8,

$$\Big((f+\lambda g)^{(n)}\Big)' = \Big(f^{(n)}\Big)' + \lambda\Big(g^{(n)}\Big)'.$$

En utilisant encore (6.11), on obtient $(f+\lambda g)^{(n+1)} = f^{(n+1)} + \lambda g^{(n+1)}$. Donc $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence éventuellement finie (cf. théorème 9.17 avec $n_b = N+1$), $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout $n \in D_N$.
On montre les autres résultats d'un seul coup.
Pour $n \in D_N$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition suivante :
Pour tout $(f;g) \in (C^N(I;\mathbb{K}))^2$, pour tout $f_0 \in C^N(I;\mathbb{K})$ ne s'annulant pas sur I, pour toute application $h : J \longrightarrow I$ avec $h \in C^N(J;\mathbb{K})$, on a $\overline{f} \in C^n(I;\mathbb{K})$, $fg \in C^n(I;\mathbb{K})$, $(1/f_0) \in C^n(I;\mathbb{K})$ et $(g\circ h) \in C^n(J;\mathbb{K})$. De plus, on a $(\overline{f})^{(n)} = \overline{f^{(n)}}$ et la formule (6.12).
On remarque que, pour $n = 0$, la formule (6.12) s'écrit : $fg = fg$, car $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$. Pour $n = 1$, cette formule s'écrit : $(fg)' = f'g + fg'$. D'après la proposition 6.18, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Si $N = 0$, on a terminé. On suppose désormais que $N \geq 1$. D'après la proposition 6.20, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \leq N-1$. Soit $(f;g) \in (C^N(I;\mathbb{K}))^2$, $f_0 \in C^N(I;\mathbb{K})$ ne s'annulant pas sur I et $h : J \longrightarrow I$ avec $h \in C^N(J;\mathbb{K})$. Toutes ces fonctions sont dérivables. Par la proposition 6.8, $\overline{f}$, fg, $(1/f_0)$ et $g \circ h$ sont dérivables et on a $(\overline{f})' = \overline{f'}$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(1/f_0)' = -f_0'/(f_0)^2$ et $(g\circ h)' = (g'\circ h)h'$. Par (6.7), on a $f' \in C^n(I;\mathbb{K})$, $g' \in C^n(I;\mathbb{K})$, $f_0' \in C^n(I;\mathbb{K})$ et $h' \in C^n(J;\mathbb{K})$.
Par l'hypothèse de récurrence, on a $(\overline{f})' \in C^n(I;\mathbb{K})$, $(fg)' = f'g + fg' \in C^n(I;\mathbb{K})$, $(1/f_0)' = -f_0'/(f_0)^2 \in C^n(I;\mathbb{K})$ et $(g\circ h)' = (g'\circ h)h' \in C^n(J;\mathbb{K})$. Par (6.7), on a donc $\overline{f} \in C^{n+1}(I;\mathbb{K})$, $fg \in C^{n+1}(I;\mathbb{K})$, $(1/f_0) \in C^{n+1}(I;\mathbb{K})$ et $(g\circ h) \in C^{n+1}(J;\mathbb{K})$. De plus, $(\overline{f})^{(n+1)} = ((\overline{f})^{(n)})' = (\overline{f^{(n)}})' = \overline{f^{(n+1)}}$, d'après l'hypothèse de récurrence et la proposition 6.8. En dérivant une fois chaque membre de l'égalité (6.12), on obtient, en utilisant les propositions 6.8 et 3.9,

$$\begin{aligned}
\big(f\cdot g\big)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot \big(f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}\big)' = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot \big(f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)} + f^{(n-k)} \cdot g^{(k+1)}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)} + \sum_{\ell=1}^{n+1} C_{\ell-1}^n \cdot f^{(n-\ell+1)} \cdot g^{(\ell)} \\
&= C_0^n \cdot f^{(n+1)} \cdot g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \big(C_k^n + C_{k-1}^n\big) \cdot f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)} + C_n^n \cdot f^{(0)} \cdot g^{(n+1)} \\
&= C_0^{n+1} \cdot f^{(n+1)} \cdot g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_k^{n+1} \cdot f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)} + C_{n+1}^{n+1} \cdot f^{(0)} \cdot g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} \cdot f^{(n+1-k)} \cdot g^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{n+1} C_{n+1-\ell}^{n+1} \cdot f^{(\ell)} \cdot g^{(n+1-\ell)} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n+1} C_\ell^{n+1} \cdot f^{(\ell)} \cdot g^{(n+1-\ell)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

On a montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence éventuellement finie (cf. théorème 9.17 avec $n_b = N+1$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in D_N$. □

On a vu dans le paragraphe 6.3.1 précédent que l'espace vectoriel $P(I;\mathbb{K})$ des fonctions polynômiales sur I à coefficients dans $\mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I;\mathbb{K})$ (cf. proposition 6.22).

On a bien mieux comme le montre le résultat suivant. On rappelle (cf. définition 6.21) que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par $f_n(x) = x^n$.

Proposition 6.33. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $P(I;\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(I;\mathbb{K})$. De plus, pour tout $(n;p) \in \mathbb{N}^2$,*

$$f_n^{(p)} \;=\; \frac{n!}{(n-p)!} \cdot f_{n-p} \quad si \quad p \leq n \quad et \quad f_n^{(p)} \;=\; 0 \quad si \quad p > n\,. \tag{6.13}$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n et $P(I;\mathbb{K})$ par P. Pour $(n;p) \in \mathbb{N}^2$, soit $g_{n;p} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$g_{n;p} \;:=\; \frac{n!}{(n-p)!} \cdot f_{n-p} \quad \text{si} \quad p \leq n \quad \text{et} \quad g_{n;p} \;=\; 0 \quad \text{si} \quad p > n\,.$$

D'après la proposition 6.22, on sait que $f_q \in C^1$, pour tout $q \in \mathbb{N}$, et $0 \in C^1$. Donc, toujours grâce à cette proposition 6.22, on a, pour $(n;p) \in \mathbb{N}^2$,
si $p > n$, $g'_{n;p} = 0 = g_{n;p+1}$,
si $p = n$, $g'_{n;p} = (n!)((n-p)!)^{-1}(f_0)' = 0 = g_{n;p+1}$,
et si $p < n$,

$$\begin{aligned} g'_{n;p} \;&=\; \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \big(f_{n-p}\big)' \;=\; \frac{n!}{(n-p)!} \cdot (n-p) \cdot f_{n-p-1} \;=\; \frac{n!}{(n-p-1)!} \cdot f_{n-p-1} \\ &=\; \frac{n!}{(n-(p+1))!} \cdot f_{n-(p+1)} \;=\; g_{n;p+1}\,. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a, en prenant $f = f_n$ et $(g_0;\cdots;g_p) = (g_{n;0};\cdots;g_{n;p})$, la validité de la proposition $\mathcal{D}(p)$ de la proposition 6.29. Par cette proposition 6.29, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in C^p$ et, pour $j \in [\![0;p]\!]$, $f_n^{(j)} = g_{n;j}$.
Comme $f_n \in C^1$ et $C^1 \subset C^0$ (cf. (6.8)), on a aussi $f_n \in C^0$. Par la définition 6.25, $f_n \in C^\infty$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f_n^{(j)} = g_{n;j}$, ce qui démontre (6.13).
L'espace vectoriel C^∞ contient l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ donc il contient le sous-espace vectoriel engendré par cet ensemble, à savoir P. □

On a vu, au paragraphe 4.2.3, la notion de prolongement par continuité. On va introduire ici une notion de prolongement à la classe C^N, pour $N \in (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$.

Proposition 6.34. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$. On pose $I_a^- :=]-\infty; a[\cap I$, $I_a^+ =]a; +\infty[\cap I$ et $D_N := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N\}$. Soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction dont la restriction $f_{|I_a^-}$ à I_a^- est de classe C^N sur I_a^- et la restriction $f_{|I_a^+}$ à I_a^+ est de classe C^N sur I_a^+. On suppose, de plus, que*

$$\forall\, p \in D_N\,, \quad \exists\, \ell_p \in \mathbb{K}; \quad \lim_a\, (f_{|I_a^-})^{(p)} \;=\; \ell_p \;=\; \lim_a\, (f_{|I_a^+})^{(p)}\,. \tag{6.14}$$

Alors f admet un prolongement par continuité g en a, $g \in C^N(I;\mathbb{K})$ et

$$\forall\, p \in D_N\,, \quad g^{(p)}(a) \;=\; \ell_p\,. \tag{6.15}$$

Dans le cadre de cette proposition 6.34, on dit que le prolongement par continuité g de f en a prolonge f à la classe C^N.

Preuve de la proposition 6.34 : Soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Par l'hypothèse (6.14) avec $p = 0$, on sait que les limites à gauche et à droite de f en a existent dans $\mathbb{K}$ et coïncident. Par la proposition 4.21, f admet ℓ_0 pour limite en a. On peut donc définir le prolongement g par continuité

de f (cf. définition 4.25) et $g(a) = \ell_0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : pour toute fonction $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$, dont la restriction à I_a^- est de classe C^n sur I_a^- et dont la restriction à I_a^+ est de classe C^n sur I_a^+, telle que (6.14) avec N remplacé par n soit vraie, son prolongement g par continuité en a est de classe C^n sur I et vérifie (6.15) avec N remplacé par n.
$\mathcal{P}(0)$ est vraie par la proposition 4.21 et la définition 4.25.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$ dont la restriction à I_a^- est de classe C^{n+1} sur I_a^- et dont la restriction à I_a^+ est de classe C^{n+1} sur I_a^+, telle que (6.14) avec N remplacé par $n+1$ soit vraie. On sait que f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que la restriction de f' à I_a^- (resp. I_a^+) est $(f_{|I_a^-})'$ (resp. $(f_{|I_a^+})'$). Par (6.7), $f_{|I_a^-}$ (resp. $f_{|I_a^+}$) est de classe C^n sur I_a^- (resp. I_a^+). Pour $p \in D_n$, on a, d'après la proposition 6.31,

$$(f_{|I_a^+})^{(p+1)} \;=\; \Big((f_{|I_a^+})'\Big)^{(p)} \;=\; ((f')_{|I_a^+})^{(p)} \;=\; \Big((f')^{(p)}\Big)_{|I_a^+} ,$$

puisque f et $f_{|I_a^+}$ coïncident sur I_a^+ et puisque f' et $(f')_{|I_a^+}$ coïncident sur I_a^+. De même, on a

$$(f_{|I_a^-})^{(p+1)} \;=\; \Big((f_{|I_a^-})'\Big)^{(p)} \;=\; ((f')_{|I_a^-})^{(p)} \;=\; \Big((f')^{(p)}\Big)_{|I_a^-} .$$

Par (6.14) avec N remplacé par $n+1$,

$$\forall\, p \in D_n\,, \quad \lim_a\, (f_{|I_a^-})^{(p+1)} \;=\; \ell_{p+1} \;=\; \lim_a\, (f_{|I_a^+})^{(p+1)}$$

donc

$$\forall\, p \in D_n\,, \quad \lim_a\, ((f')_{|I_a^-})^{(p)} \;=\; \ell_{p+1} \;=\; \lim_a\, ((f')_{|I_a^+})^{(p)} .$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à f'. Elle admet donc un prolongement g_1 par continuité en a, g_1 est C^n sur I et on a

$$\forall\, q \in D_n\,, \quad g_1^{(q)}(a) \;=\; \ell_{q+1} . \tag{6.16}$$

Pour montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, il suffit de montrer que le prolongement g par continuité de f en a est dérivable sur I et que $g' = g_1$. En effet, dans ce cas, g sera C^{n+1} sur I car g_1 y est C^n (cf. (6.7)) et (6.16) donnera (6.15) avec N remplacé par $n+1$.
Sur I_a^- (resp. I_a^+), $g = f$ et f est de classe C^{n+1}, donc dérivable. De plus, sur I_a^- (resp. I_a^+), $f' = g_1$, donc $g' = g_1$ sur cet intervalle. Il reste à montrer que g est dérivable en a et que $g'(a) = g_1(a)$.
Comme g et g_1 sont continues, $\mathrm{Re}\, g$ et $\mathrm{Re}\, g_1$ le sont aussi (cf. proposition 4.33). Comme g est dérivable sur $I \setminus \{a\}$, $\mathrm{Re}\, g$ l'est aussi (cf. proposition 6.8). On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.14) à $\mathrm{Re}\, g$ sur $[x; a]$ ou $[a; x]$, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$. Soit $x \in I \setminus \{a\}$, il existe donc un $c_x \in I$ strictement compris entre x et a tel que $\mathrm{Re}\, g(x) - \mathrm{Re}\, g(a) = (\mathrm{Re}\, g)'(c_x)(x - a)$. De plus, comme $\mathrm{Re}\, g_1$ est continue en a, on a, par la proposition 4.21,

$$\lim_{\neq a} (\mathrm{Re}\, g)' \;=\; \lim_{\neq a} \mathrm{Re}\, g_1 \;=\; \mathrm{Re}\, g_1(a) \;=\; \mathrm{Re}\,(\ell_1) .$$

Soit $\epsilon > 0$. D'après l'existence de la limite précédente, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $y \in]a-\delta; a+\delta[\cap (I \setminus \{a\})$, $|(\mathrm{Re}\, g)'(y) - \ell_1| < \epsilon$. Pour $x \in I \setminus \{a\}$ avec $x \in]a - \delta; a + \delta[$, on a donc

$$\left| \frac{\mathrm{Re}\, g(x) \;-\; \mathrm{Re}\, g(a)}{x - a} \;-\; \ell_1 \right| \;=\; \big|(\mathrm{Re}\, g)'(c_x) \;-\; \mathrm{Re}\,(\ell_1)\big| \;<\; \epsilon$$

car $c_x \in]a-\delta; a+\delta[\cap (I \setminus \{a\})$. On a montré que $\mathrm{Re}\, g$ est dérivable en a de nombre dérivé $\mathrm{Re}\,(\ell_1) = \mathrm{Re}\, g_1(a)$. En remplaçant la partie réelle par la partie imaginaire dans l'argument précédent, on obtient que $\mathrm{Im}\, g$ est dérivable en a de nombre dérivé $\mathrm{Im}\,(\ell_1) = \mathrm{Im}\, g_1(a)$. Comme $g = \mathrm{Re}\, g + i\mathrm{Im}\, g$, on déduit de la proposition 6.8 que g est dérivable en a de nombre dérivé $\ell_1 = g_1(a)$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $N \in \mathbb{N}$, les résultats de la proposition 6.34 sont valables d'après $\mathcal{P}(N)$. Comme ces résultats sont valables pour tout $N \in \mathbb{N}$, ils le sont pour $N = \infty$. $\square$