

Exemples

1

1- $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni bornée ni monotone.

2- $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto 2$ si n pair
 n si n impair.

$$u_{2n} \rightarrow 2, \quad u_{2n+1} \rightarrow +\infty$$

donc u n'a pas de limite.

3- $u = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 2p$, on a

$$u_{2p} = \frac{1}{2p} > \frac{1}{n} \geq u_n. \quad u_{2p} \text{ a vue sur la mer}$$

On a

$$u_{2p+2} \geq 0 > u_{2p+1}. \quad u_{2p+1} \text{ a la rue bouchée.}$$

4- $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ c'est une norme.
 $x \mapsto \frac{|x|}{2}$

Pour $x \neq 0$, $|x| > 0$ donc $2|x| > |x|$

d'où $|x| > N(x)$.

5. Soit $f:]0;1[\rightarrow \mathbb{R}$

12

$$x \mapsto \frac{1}{2x} \sin\left(\frac{1}{2x}\right).$$

f est continue par composition et produit.

Soit $u = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = \left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

u et v sont à valeurs dans $]0;1[$

et tendent vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = \frac{1}{u_n} \rightarrow +\infty$

$$f(v_n) = \frac{1}{v_n} \rightarrow -\infty.$$

Donc f n'est ni majorée ni minorée.

6. Soit $V = B(0; 1/2) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(0; 2))$.

$$V \cap \mathcal{C}(0; 1) = \emptyset \text{ et } V \supset B(0; \frac{1}{2})$$

donc c'est un voisinage de 0.

7. $V = \overline{B}((1; 2); 1)$ est un voisinage

de $(1; 2)$ car elle contient $B((1; 2); 1)$.

V n'est pas ouvert car $V \neq \overset{\circ}{V} = B((1; 2); 1)$
par le cours.

8. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

3

$$V_n = \left] 1 - \frac{1}{n} ; 1 + \frac{1}{n} \right[\text{ vois. de } 1,$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \{1\} \text{ n'est pas un vois. de } 1,$$

9. Soit $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$$

$$A \cup B = \mathbb{R}^2 \text{ et } \widehat{A \cup B} = \mathbb{R}^2$$

$$\overset{\circ}{A} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}, \quad \overset{\circ}{B} = B$$

$$\text{et } \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\} \\ \neq \mathbb{R}^2.$$

10. Soit $P = B(0; 1) \cup \frac{1}{2}(0; 1)$,

$$\overset{\circ}{P} = B(0; 1) \neq \emptyset \\ \neq P$$

$$\overline{P} = \overline{B}(0; 1) \neq P \\ \neq \mathbb{R}^2$$

11. On munit $M_2(\mathbb{R})$ de la norme

$$(*) \quad \|(m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}\| := \sup\{|m_{ij}|, 1 \leq i, j \leq 2\},$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

14

$$M_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 + \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$\det M_n = -\frac{1}{n} \neq 0$$

$$\|M - M_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

12. On utilise la norme définie dans (*).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$L_n = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_n = \begin{pmatrix} n + \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } \|L_n\| = n \text{ et } \|M_n - L_n\| = \frac{1}{n}.$$

13. Soit $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

f est bornée et n'a pas de limite
en 0 ($\lim_{x \rightarrow 0^-} f = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f$).

14. Soit $N: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^+$ la norme
définie par $N(\sum_k a_k x^k) = \sup_k |a_k|$.

Soit $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = x^2$ et
pour $n \geq 3$, $P_n = (1+x)^2 + \frac{x^n}{n}$.

On a $\deg P_n = n$ pour tout n .

5

Pour $n \geq 3$,

$$N(P_n - (1+x^2)) = N\left(\frac{x^n}{n}\right) = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

15. Soit $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $A =]-\infty; \frac{1}{2}] \neq \emptyset$ et $B =]\frac{1}{2}; +\infty[\neq \emptyset$

On a $A \cup B = \mathbb{R}$. $f|_A$ est la

fonct. constante égale à 0 sur $[0; \frac{1}{2}]$

donc est conti. et $f|_B$ est la fonct.

constante égale à 1 sur $]\frac{1}{2}; 1]$

donc est conti.

16. Soit $f:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$

f est conti.

$$x \mapsto x+1 \text{ si } x \leq 0$$

sur $]-1; 0[\cup]0; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; 1[$.

$$1-2x \text{ si } 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$x - \frac{1}{2} \text{ si } x > \frac{1}{2}$$

$\lim_{0^-} f = 1 = f(0) = \lim_{0^+} f$ donc f est conti. en 0.

$\lim_{\frac{1}{2}^-} f = 0 = f(\frac{1}{2}) = \lim_{\frac{1}{2}^+} f$ donc f est conti. en $1/2$.

On a $f([-1; 0]) \subset]0; 1]$

$f([0; \frac{1}{2}]) \subset]0; 1[$

$f([\frac{1}{2}; 1]) \subset [0; \frac{1}{2}]$

16

dne $f([-1; 1]) \subset [0; 1]$.

$0 = f(\frac{1}{2})$ et, pour $y \in]0; 1]$,

$y - 1 \in [-1; 0]$ et $f(y - 1) = y$.

Dne $[0; 1] \subset f([-1; 1])$.

17. Pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a
nécessairement $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$!

Exemple de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq. $f(\mathbb{R}) = [0; 1]$:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1, \\ x & \text{si } 1 > x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

18. $A =]0; 1[$, $B = \mathbb{Z}$, $C = [0; 1[\cup [2; 3]$.

19. Soit $N: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^+$ déf. par
 $N(\sum_k a_k x^k) = \sup_k |a_k|$. C'est une norme.

Soit $u = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

7

Supposons que u a une val. d'adhérence,

Il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ et une extractrice

φ tq. $u \circ \varphi \xrightarrow{(\star)} P$ par N .

Comme N est ent., par N ,

$$\underline{N(u_{\varphi(n)})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(P).$$

↓
ce qui est égal à 1 D'où $N(P) = 1$.

Soit $d = \deg P$. Comme $\lim \varphi = +\infty$,
il existe N tq.

$$n \geq N \Rightarrow \varphi(n) \geq d.$$

Par $n \geq N$, on a

$$N(u_{\varphi(n)} - P) \geq 1$$

D'après $(\star)$, on a par passage à la
limite dans les inégalités, $0 \geq 1$.

Contr. Donc u n'a pas de val.
d'adhérence.

20. $B(0;1)$ n'est pas compacte 18
g. CC 2.

$\overline{B}(0;1)$ est fermée et bornée,

21. $\mathbb{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} [p; p+1[$ (réunion disjointe).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto p \quad \text{si } x \in [p; p+1 - \frac{1}{n+1}[$$

$$p + (n+1)(x - (p+1 - \frac{1}{n+1})) \quad \text{si } x \in [p+1 - \frac{1}{n+1}; p+1[.$$

f_n est conti. sur $]p; p+1 - \frac{1}{n+1}[$ et

sur $]p+1 - \frac{1}{n+1}; p+1[$, pour $p \in \mathbb{Z}$.

Soit $p \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{(p+1 - \frac{1}{n+1})^+} f_n = p = f_n(p+1 - \frac{1}{n+1})$$

$$\lim_{(p+1 - \frac{1}{n+1})^-} f_n = p \text{ donc } f_n \text{ est conti. en } p+1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{p^+} f_n = p = f_n(p),$$

$$\lim_{p^-} f_n = p - 1 + (n+1)(p - (p - \frac{1}{n+1})) = p.$$

Une f_n est conti. en p .

19

Pour $p \in \mathbb{Z}$, $(f_n(p))_n$ est constante égale à p donc tend vers $p = E(p)$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tq.

$$n \geq N \Rightarrow E(x) \leq x < E(x) + 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Donc $(f_n(x))_{n \geq N}$ est constante égale à $E(x)$ donc $(f_n(x))_n$ tend vers $E(x)$.

Une $(f_n)_n$ cv. simplement vers E sur $\mathbb{R}$.

22 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n: \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{36} - \frac{1}{n}$.

$f_n \downarrow$.

Soit $m \geq n$. Pour $x \in \mathbb{R}^{++}$,

$$f_m(x) - f_n(x) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \geq 0$$

donc $(f_n)_n$ est $\uparrow$.

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

10

$$|f_n(x) - \frac{1}{2}| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Une (f_n) cv. simplement vers
 $0 < x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(En fait, la cv. est unif. sur $\mathbb{R}^{+*}$).

23- Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x-1)^n$.

D'après les prop. des suites géométriques,
 (f_n) cv. simpl. sur $[1; 2]$ vers

$$f: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ 1 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Si la cv. était uniforme alors,
comme chaque f_n est conti., f
serait conti. (q. cours). Or f
n'est pas conti. en 2. La cv.
n'est pas uniforme.

24 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

11

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} e^x + \frac{1}{n(1+x)} & \text{si } x \geq 0, \\ e^x + \frac{2}{n(1-x)} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} f_n = 1 + \frac{2}{n} \neq 1 + \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow 0^+} f_n$$

donc f_n n'est pas conti. en 0.

Pour $x \geq 0$

$$|f_n(x) - e^x| = \frac{1}{n(1+x)} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}$$

Pour $x < 0$,

$$|f_n(x) - e^x| = \frac{2}{n(1-x)} \leq \frac{2}{n}.$$

Dne

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - e^x| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$$

Dne $(f_n)_n$ cv. vers $x \mapsto e^x$

unif. sur $\mathbb{R}$, par le th. des gendarmes.

25. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

12

$$f_n: [0,1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2 + x^n.$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = 3.$$

$$\text{Dne } \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = 3.$$

$$\text{Pour } x \in [0,1[, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 2$$

(cf. suite géométriques).

$$\text{Dne } \lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 2.$$

26. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 0 \text{ si } x \geq 0$$

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x \text{ si } x < 0.$$

$$\text{Pour } x \geq 0, f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Pour } x < 0, f_n(x) = x = \frac{x^{2n}}{(2n)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

comme la suite de $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ qui tend vers 0

car c'est le terme général
d'une série convergente (la série
de l'exponentielle).

13

Donc (f_n) cv, simplement sur $\mathbb{R}$
vers la fct, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 0 \text{ si } x \geq 0 \\ x \text{ si } x \leq 0,$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \leq 0$, on a

$$f_n(x) = \underbrace{x^{2n}}_{\substack{\nearrow x \rightarrow -\infty \\ +\infty}} \left(\underbrace{\frac{1}{(2n)!}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{x^{2n}-1}}_{\substack{\nearrow x \rightarrow -\infty \\ 0}} \right)$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n = +\infty.$$

27. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 0 \text{ si } x < n$$

$$\frac{4}{n^2}(x-n) \text{ si } n \leq x < \frac{3n}{2}$$

$$\frac{4}{n^2}(2n-x) \text{ si } \frac{3n}{2} \leq x < 2n$$

$$0 \text{ si } x \geq 2n.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n &= \int_n^{3n/2} (x-n) \frac{4}{n^2} dx + \int_{3n/2}^{2n} (2n-x) \frac{4}{n^2} dx \\ &= \frac{4}{n^2} \left(\int_n^{3n/2} x dx - \frac{n^2}{2} + 2\frac{n^2}{2} - \int_{3n/2}^{2n} x dx \right) \\ &= \frac{4}{n^2} \left(\frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{3n}{2} \right)^2 - n^2 \right) - \frac{1}{2} \left(4n^2 - \left(\frac{3n}{2} \right)^2 \right) \right) \\ &= \frac{4}{n^2} \left(\frac{9}{4} n^2 - 2n^2 \right) = 1. \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus [n; 2n[$, $\varphi_n(x) = 0$.

Pour $x \in [n; \frac{3n}{2}[$,

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq \frac{4}{n^2} \left(\frac{3n}{2} - n \right) = \frac{2}{n}$$

Pour $x \in [\frac{3n}{2}; 2n[$,

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq \frac{4}{n^2} \left(2n - \frac{3n}{2} \right) = \frac{2}{n}$$

Donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n(x)| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$.
(en fait c'est =).

Donc $(\varphi_n) \rightarrow 0$ unif. sur $\mathbb{R}$ par le th. des gendarmes.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

115

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ 2(x+1) & \text{si } x \in [-1; 0[\\ 2(x-1) & \text{si } x \in [0; 1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 2(x+1) \text{ si } x \in [-1; 0[\\ & 2(x-1) \text{ si } x \in [0; 1[\\ & 0 \text{ si } x \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f &= 2 \int_{-1}^0 (x+1) dx + 2 \int_0^1 (1-x) dx \\ &= -2 \int_0^1 x dx + 2 + 2 - 2 \int_0^1 x dx \\ &= 4 - 4 \times \frac{1}{2} = 2. \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n = f - \varphi_n$.

$$\text{On a } \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f - \int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 2 - 1 = 1.$$

Comme $(\varphi_n)_n \rightarrow 0$ unif. sur $\mathbb{R}$,

(f_n) converge f unif. sur $\mathbb{R}$.

28. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n: \text{graph of a periodic sawtooth function with period 2, amplitude } 1/n, \text{ centered at } x=0.$$

f_n n'est pas dérivable en 1

$$\underline{\quad \quad \quad} = 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

16

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$$

donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Donc $(f_n)_n$ cv. unif. vers 0

Sur $\mathbb{R}$ par le Th. des gendarmes,
0 est dérivable,

29. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{-x^n}{n}.$$

$$f_n \text{ est } C^1 \text{ et } f'_n(x) = -x^{n-1}.$$

Soit $x \in]-1; 1[$.

Comme $|f_n(x)| \leq |x|^n \leq$ terme général d'une série géom. convergente,

donc $\sum |f_n(x)|$ cv. et, par le cours,

$\sum f_n(x)$ cv. i. Donc $\sum f_n$ cv.

Simpl. sur $]-1; 1[$ vers une certaine
fonct. f .

Comme $(f_n(0))_{n=0} = 0$, $\sum f_n(0)$ cv. vers 0.

Donc $f(0) = 0$.

17

Soit $a \in]0; 1[$ et $x \in [-a; a]$.

$$|f'_n(x)| = |x|^{n-1} \leq |a|^{n-1}.$$

Donc

$$\sup_{x \in [-a; a]} |f'_n(x)| \leq |a|^{n-1} \text{ terme g n r l d'une série g n r l.}$$

Convergente car $|a| < 1$.

Donc $\sum f'_n$ cv. normalement

sur $[-a; a]$. Par le cours, elle cv.

unif. sur $[-a; a]$.

Ceci étant vrai pour tout $a \in]0; 1[$,
il existe $g:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$

t.q. $\sum f'_n$ cv. simpl. vers g

et $\sum f'_n$ cv. unif. vers g sur
tout $[-a; a]$ avec $a \in]0; 1[$.

Par le cours, pour tout $a \in]0; 1[$,

f est dérivable sur $[-a; a]$ de dérivée g donc
 f est dérivable sur $]-1; 1[$ de dérivée g .

Pour $x \in]-1; 1[$, on a

$$\sum_{n=1}^N f'_n(x) = - \sum_{n=1}^N x^{n-1} = - \sum_{k=0}^{N-1} x^k = - \frac{1-x^N}{1-x}$$

Donc

18

$$\sum_{n=1}^N f'_n(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{1-x}.$$

$\downarrow N \rightarrow \infty$
 $g(x)$

Donc $f' = g :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ Conti.
 $x \mapsto -\frac{1}{1-x}$

Pour $x \in]-1; 1[$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt = 0 + [\ln(1-x)]_0^x \\ = \ln(1-x).$$

Donc $\sum f_n$ ex. simple vers $x \mapsto \ln(1-x)$
sur $] -1; 1[$.

30. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{et } f_0 = 1. \quad x \mapsto \frac{(-1)^n |x|^n}{n}.$$

Pour $x \in [-1; 1]$, et $n \geq 0$,

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n} = |f_n(1)|.$$

Donc $\sup_{x \in [-1; 1]} |f_n(x)| = |f_n(1)| = \frac{1}{n}.$

Comme $\sum \frac{1}{n}$ div.

19.

$\sum f_n$ ne cv. pas normalement
sur $[-1; 1]$.

Sur $x \in [-1; 1]$, Comme $u: \begin{matrix} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ n \mapsto \frac{1}{n} \end{matrix}$ est positive, décroissante et tend vers 0, $\sum f_n(x)$ satisfait à la règle spéciale des séries alternées (q. ex. 76).

Donc $\sum f_n(x)$ cv. vers un certain $S(x)$ et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \sum_{n=0}^N f_n(x) - S(x) \right| \leq \frac{|x|^{N+1}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1}.$$

Donc

$$\sup_{x \in [-1; 1]} \left| \sum_{n=0}^N f_n(x) - S(x) \right| \leq \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $\sum f_n$ cv. vers S unif.
sur $[-1; 1]$.