Espaces $\mathcal{L}^p$, L^p.

Exercice 115. : Soit $p \in [1; +\infty]$. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$ est-elle dans $\mathcal{L}^p(]0; 1]; d\lambda)$?
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$ est-elle dans $\mathcal{L}^p([1; +\infty[; d\lambda)$?
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $g_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$, si $x \neq 0$, et par $g_\alpha(0) = 0$. La fonction g_α appartient-elle à $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; d\lambda)$?

Exercice 116. : Soit $(\Omega; \mathcal{T}; \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable relativement aux tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On note par ν la mesure positive de densité f par rapport à μ. Soit $p \in [1; +\infty[$. Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable relativement aux tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $g \in \mathcal{L}^p(\Omega; d\nu)$ si et seulement si $|g|^p f \in \mathcal{L}^1(\Omega; d\mu)$ si et seulement si $g \cdot f^{1/p} \in \mathcal{L}^p(\Omega; d\mu)$.
2. On suppose que $(\Omega; \mathcal{T}; \mu) = (\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}); \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f > 0$, λ-p.p. On note ν par $f d\lambda$.
   a). Donner un exemple de fonction f pour lequel il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction g_α de l'exercice 115 appartiennent à $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; f d\lambda)$.
   b). Donner un exemple de fonction f pour lequel les fonctions g_α de l'exercice 115 appartiennent toutes à $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; f d\lambda)$.

Exercice 117. : On considère les suites de fonctions mesurables $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}^+$ définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour $t \geq 0$,

$$f_n(t) = e^{-t} \cdot \big(\sin(t)\big)^n \quad \text{et} \quad g_n(t) = e^{-2t} \cdot \big(1 + t/n\big)^n .$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $f_n \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+)$ et $g_n \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+)$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction nulle dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+)$.
3. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+)$ vers une fonction que l'on explicitera.
   (Indication : on pourra utiliser l'exercice 98.)

Exercice 118. : Soit $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = 0$, si $|x| \geq 1$, $\psi(x) = 1 + x$, si $-1 < x < 0$, et $\psi(x) = 1 - x$, si $0 \leq x < 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\psi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi_n(x) = \psi(x - n)$.

1. Montrer que la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $\psi_n \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et calculer la norme $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}; d\lambda)$ de ψ_n.
3. La suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}; d\lambda)$? Si oui, on précisera sa limite.
4. Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$.
   a). Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f\psi_n \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}; d\lambda)$.
   b). Montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1+n;1+n]} \cdot |f|^p \, d\lambda \;=\; 0\,.$$
   c). En déduire que
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f \cdot \psi_n \, d\lambda \;=\; 0\,.$$
   d). Soit $q > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$ (avec la convention $1/(+\infty) = 0$). La suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle dans $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}; d\lambda)$? Si oui, on précisera sa limite.

Exercice 119. : On considère la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ introduite dans l'exercice 103. On a vu dans cet exercice que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et que sa norme dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}; d\lambda)$ vaut 1. On a aussi vu que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^*$. La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}; d\lambda)$? Si oui, on précisera sa limite.

Exercice 120. : Soit $\mathrm{L} = \mathrm{L}^2([-\pi;\pi]; \mathbb{R}; d\lambda)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des (classes de) fonctions mesurables de $[-\pi;\pi]$ dans $\mathbb{R}$ dont le carré est intégrable sur $[-\pi;\pi]$ pour la mesure de Lebesgue λ. On note par $\|\cdot\|$ la norme sur L définie par, pour $f \in \mathrm{L}$,

$$\|f\| \;=\; \Big(\int_{[-\pi;\pi]} |f|^2 \, d\lambda\Big)^{1/2}$$

et par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé défini par, pour $(f; g) \in \mathrm{L}^2$,

$$\langle f\,, g\rangle \;=\; \Big(\int_{[-\pi;\pi]} f \cdot g \, d\lambda\Big)^{1/2}\,.$$

Soit $\mathbb{1} : [-\pi;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction constante égale à 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n, g_n : [-\pi;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ données par $f_n(t) = \cos(nt)$ et $g_n(t) = \sin(nt)$.

1. Montrer que $\mathbb{1} \in \mathrm{L}$. Que vaut $\|\mathbb{1}\|$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\|f_n\| > 0$ et $\|g_n\| > 0$.
3. Soit
   $$\mathcal{F} \;=\; \{\mathbb{1}\} \bigcup \big\{f_n; n \in \mathbb{N}^*\big\} \bigcup \big\{g_n; n \in \mathbb{N}^*\big\}\,.$$
   Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale de L.
4. En déduire que $\mathcal{F}$ est une famille libre de L.
5. On détermine ici la suite $(\|g_n\|)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a). Vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|g_n\|^2 \;=\; \frac{2}{n} \int_0^{n\pi} \sin^2(u)\, du\,.$$

b). Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|g_n\|^2 \;=\; \pi \;-\; \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \cos(2u)\, du\,.$$

c). En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_n\| = \sqrt{\pi}$.

6. Soit $f \in \mathrm{L}$.

a). Pour $N \in \mathbb{N}^*$, soit

$$S_N(f) \;=\; \sum_{n=1}^{N} \langle f\,, g_n\rangle\, g_n \;\in\; \mathrm{L}\,.$$

Montrer que $\langle f - S_N(f)\,, S_N(f)\rangle = 0$.

b). En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \langle f\,, g_n\rangle^2$ est convergente et que sa limite est inférieure ou égale à $\|f\|^2$.

(Indication : on pourra considérer, pour $N \in \mathbb{N}$, $\|f - S_N(f)\|^2$.)

c). En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[-\pi;\pi]} f \cdot g_n\, d\lambda \;=\; 0\,.$$

7. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle dans L ?

8. Soit $f \in L$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, soit

$$T_N(f) \;=\; \langle f\,, \mathbb{1}\rangle \mathbb{1} \;+\; S_N(f) \;+\; \sum_{n=1}^{N} \langle f\,, f_n\rangle\, f_n \;\in\; \mathrm{L}\,.$$

Montrer que la suite $(v_N(f))_{N\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$v_N(f) \;:=\; \langle f\,, \mathbb{1}\rangle^2 \;+\; \sum_{n=1}^{N} \big(\langle f\,, f_n\rangle^2 \;+\; \langle f\,, g_n\rangle^2\big)$$

converge vers $\|f\|^2$.

Remarque : on a repris une partie du cours sur les séries de Fourier (cf. cours d'analyse complexe) dans un cadre plus large.