Systèmes différentiels linéaires.

Exercice 29. : Pour chacune des équations différentielles linéaires sur $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer l'ensemble de ses solutions réelles et vérifier qu'il y a exactement une seule solution qui prend la valeur 0 en 1. On note par t la variable des fonctions inconnues.

1. $y' = 0$.
2. $y' = 4y$.
3. $y' = y + t$.
4. $y' = ty$.
5. $(1 + t^2)y' = y$.
6. $y' = ty + 5t^3$.

Exercice 30. : Lemme de Gronwall.
Soit $c > 0$ et $a, f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ deux applications continues telles que

$$\forall t \geq 0\,, \quad f(t) \;\leq\; c + \int_0^t a(s)f(s)\,ds\,. \tag{17}$$

On va montrer l'inégalité

$$\forall t \geq 0\,, \quad f(t) \;\leq\; c \cdot e^{\int_0^t a(s)\,ds}\,. \tag{18}$$

1. Soit $g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

   $$g(t) \;=\; e^{-\int_0^t a(s)\,ds} \cdot \int_0^t a(s)f(s)\,ds\,.$$

   Vérifier que g est dérivable et que

   $$\forall t \geq 0\,, \quad g'(t) \;\leq\; c \cdot \frac{d}{dt}\Big(-\,e^{-\int_0^t a(s)\,ds}\Big)(t)\,. \tag{19}$$

2. En déduire que

   $$\forall t \geq 0\,, \quad g(t) \;\leq\; c \cdot \Big(1 \,-\, e^{-\int_0^t a(s)\,ds}\Big)(t)\,. \tag{20}$$

3. Déduire (18) de (17) et (20).

4. Soit $h : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ dérivable telle que, pour tout $t \geq 0$, $h'(t) \leq a(t)h(t)$. Montrer que (18) est valide avec f remplacée par h et c remplacé par $h(0)$.

Remarque : Si h est une solution de l'équation $y' = ay$ alors on sait que

$$h(t) \;=\; h(0)\, e^{\int_0^t a(s)\, ds}\,,$$

ce qui ressemble beaucoup à (18) avec f remplacée par h et c remplacé par $h(0)$. On peut vérifier que la démarche suivie ici pour montrer (18) s'inspire en fait de la résolution de l'équation $y' = ay$.

Exercice 31. : Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $0^a = 0$ et, pour $b > 0$, $b^a = \exp(a\ln(b))$. On considère sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes :

$$(E_\alpha)\;:\;|t|^\alpha\, y'(t) \;=\; y(t)\,,\quad (F_\alpha)\;:\;t\,|t|^{\alpha-1}\, y'(t) \;=\; y(t)\,,$$

où $\alpha > 0$. On s'intéresse seulement aux solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$. On comparera les résultats avec ceux donnés par le théorème de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire).

1. Montrer que la fonction nulle est la seule solution sur $\mathbb{R}$ de (E_1).
   Remarque : L'ensemble des solutions est donc bien un espace vectoriel mais de dimension 0.

2. Soit $\alpha \in]0;1[$. Montrer que la fonction nulle est la seule solution sur $\mathbb{R}$ de (E_α) et de (F_α).

3. Montrer que l'ensemble des solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de (F_1) est $\{ky_1; k \in \mathbb{R}\}$, où $y_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $y_1(t) = t$.
   Remarque : L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1. Mais, pour $c \neq 0$, il n'y a aucune solution qui vaut c en 0.

4. Soit $\alpha > 1$. Montrer que l'ensemble des solutions réelles de (E_α) sur $\mathbb{R}$ est $\{ky_\alpha; k \in \mathbb{R}\}$, où $y_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $y_\alpha(t) = 0$ si $x \leq 0$ et

$$y_\alpha(t) \;=\; \exp\Big(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big)\;,\text{ si } x > 0\,.$$

   Remarque : L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1. Mais, pour $c \neq 0$, il n'y a aucune solution qui vaut c en -1.

5. Soit $\alpha > 1$. Montrer que l'ensemble des solutions réelles de (F_α) sur $\mathbb{R}$ est $\{y_{k_-;k_+}; k_- \in \mathbb{R}, k_+ \in \mathbb{R}\}$, où $y_{k_-;k_+} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $y_{k_-;k_+}(0) = 0$,

$$y_{k_-;k_+}(t) \;=\; k_+\exp\Big(\frac{|t|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big)\;,\text{ si } t > 0 \text{ et } y_{k_-;k_+}(t) \;=\; k_-\exp\Big(\frac{|t|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big)\;,\text{ si } t < 0\,.$$

   Remarque : On peut aussi écrire l'ensemble des solutions sous la forme $\{k_+y_{0;1} + k_-y_{1;0}; k_- \in \mathbb{R}, k_+ \in \mathbb{R}\}$. C'est donc un espace vectoriel de dimension 2. De plus, pour $c \neq 0$, il n'y a aucune solution qui vaut c en 0.

6. Soit $\alpha > 1$. Montrer qu'il existe une unique solution de (E_α) qui vaut 2 en 1.
   Remarque : Il y a une infinité de solutions qui valent 0 en -1.

7. Soit $\alpha > 1$. Montrer que l'ensemble des solutions réelles de (F_α) sur $\mathbb{R}$ qui valent 2 en 1 est infini.

Exercice 32. : Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1. On note par $\partial_1 F$ (resp. $\partial_2 F$) la dérivée partielle de F par rapport à la première (resp. deuxième) variable. Soit (E) l'équation différentielle linéaire d'inconnue $Z : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur strictement positive, donnée par

$$\partial_1 F\big(x(t); y(t)\big) \cdot x'(t) \;+\; \partial_2 F\big(x(t); y(t)\big) \cdot y'(t) \;=\; 0\,,$$

où, pour $t \in I$, $Z(t) = (x(t); y(t))$.
Soit $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. On remarque que la fonction $Z_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $Z_0(t) = (x_0; y_0)$ est une solution de (E) valant $(x_0; y_0)$ à $t = t_0$.

1. Soit $Z : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une solution de (E). Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall t \in I\,, \quad F\big(x(t); y(t)\big) \;=\; c\,.$$

2. On suppose que $\partial_2 F(x_0; y_0) \neq 0$. Construire une solution non constante $Z : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de (E) telle que $t_0 \in I$ et $Z(t_0) = (x_0; y_0)$.

3. Même question sous l'hypothèse que $\partial_1 F(x_0; y_0) \neq 0$.

Remarque : Le problème de Cauchy pour l'équation différentielle (E) de condition initiale en t_0 donnée par $(x_0; y_0)$ avec $\partial_1 F(x_0; y_0) \neq 0$ (ou bien $\partial_2 F(x_0; y_0) \neq 0$) admet donc (au moins) deux solutions.

Exercice 33. : On considère le système différentiel linéaire (E), d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y'(t) \;=\; AY(t) + \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tA$.

2. Résoudre le système différentiel linéaire sans second membre associée (E_0), qui est donné par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = AY(t)$.

3. En déduire l'ensemble des solutions S du système (E).

Exercice 34. : Soit, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2 \\ 2 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) \;=\; \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

1. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel linéaire (E), d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donné par $y' = Ay + B$.

Exercice 35. : On considère le système différentiel linéaire (E), d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y'(t) \;=\; AY(t) + \begin{pmatrix} -t \\ e^{-t} \end{pmatrix}\,, \quad \text{où } A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tA$.

2. Résoudre le système différentiel linéaire sans second membre associée (E_0), qui est donné par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = AY(t)$.

3. En déduire l'ensemble des solutions S du système (E).

Exercice 36. : On note par I_2 la matrice identité 2×2. Soit

$$N \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

1. Pour $(a; b) \in \mathbb{C}^2$, montrer que $\exp(aI_2 + bN) = e^a(I_2 + bN)$. (Indication : on pourra noter que $N^2 = 0$).

2. Soit $(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ le système différentiel linéaire (E_0), d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donné par $Y' = (\alpha I_2 + \beta N)Y$.

Exercice 37. : On note par I_3 la matrice identité 3×3. Soit

$$N \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

1. Calculer N^2 et N^3.

2. Pour $(a; b) \in \mathbb{C}^2$, montrer que $\exp(aI_3 + bN) = e^a(I_3 + bN + (b^2/2)N^2)$.

3. Soit $(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ le système différentiel linéaire (E_0), d'inconnue $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, donné par $M' = (\alpha I_3 + \beta N)M$.

4. En déduire l'ensemble S_0 des solutions du système différentiel linéaire, d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^3$, donné par $Y' = (\alpha I_3 + \beta N)Y$.

Exercice 38. : Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.

1. Soit $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe C^1. Soit $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ définie par $E(t) = \exp(\alpha(t)B)$. Montrer que E est de classe C^1 et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E'(t) = \alpha'(t)BE(t) = \alpha'(t)E(t)B$.

2. Soit $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Résoudre le système différentiel linéaire, d'inconnue $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, donné par $M' = aBM$.

3. Résoudre le système différentiel linéaire, d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^d$, donnée par $Y' = aBY$, en donnant une base de l'ensemble des solutions.

Remarque : On note que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(\alpha B)'(t)(\alpha B)(t) - (\alpha B)(t)(\alpha B)'(t) = 0$. On pourra comparer les résultats du présent exercice avec ceux de l'exercice 39.

Exercice 39. : On considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Calculer AB, BA, A^2 et B^2. Vérifier que $AB \neq BA$.

2. Montrer que $\exp(A) = I_2 + A$, $\exp(B) = I_2 + B$. Vérifier que $\exp(A)\exp(B) \neq \exp(B)\exp(A)$.

3. Soit $C = A + B$. Montrer de deux façons différentes que $\exp(C) = \mathrm{ch}\,(1)I_2 + \mathrm{sh}\,(1)C$. (Indication : on pourra remarquer que $C^2 = I_2$).

4. Vérifier que $\exp(C) \neq \exp(A)\exp(B)$ et $\exp(C) \neq \exp(B)\exp(A)$.

5. Soit $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la fonction de classe C^∞ définie par $M(t) = A + t^2 B$. Vérifier que, pour $t \neq 0$, $M(t)M'(t) - M'(t)M(t) \neq 0$.

6. Soit N la primitive de M donnée par $N(t) = t(A + (t^2/3)B)$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \exp\big(N(t)\big) \;=\; \mathrm{ch}\,\big(t^2/\sqrt{3}\big)I_2 \,+\, s(t)A \,+\, \big(t/\sqrt{3}\big)\mathrm{sh}\,\big(t^2/\sqrt{3}\big)B\,,$$

où s est la somme d'une série entière réelle. (Indication : on pourra remarquer que $N(t)^2$ est un multiple de I_2). En déduire que la dérivée quatrième de $\exp(N)$ en 0 s'écrit cI_2 pour un certain réel $c > 0$.

7. On suppose que l'on a une solution de l'équation $Z' = MZ$ d'inconnue $Z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\exp(R)$ avec $R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dérivable et $R(0) = 0$. Montrer que la dérivée quatrième de $\exp(R)$ en 0 est $2(AB + 3BA)$.

8. En déduire que $\exp(N)$ n'est pas solution de l'équation $Z' = MZ$ d'inconnue $Z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque : on a montré que l'exponentielle d'une primitive de M n'est pas solution de l'équation $Z' = MZ$ d'inconnue $Z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. C'était le cas dans le 2 de l'exercice 38 et aussi dans le cas où M est une fonction constante (cf. cours).

Exercice 40. : Soit $I =]-\pi/2;\pi/2[$. Soit (E) le système différentiel linéaire d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $Y(t) = (x_1(t);x_2(t))^T$, donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & -x_1(t)\tan t \,+\, x_2(t) \,+\, \tan t\,, \\ x_2'(t) & = & x_1(t) \,+\, x_2(t)\tan t \,-\, 1\,. \end{array} \right.$$

On note par (E_0) le système sans second membre associé.

1. Montrer que $Z : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $Z(t) = (1;\tan t)^T$, est solution de (E_0).
2. Trouver une solution U de (E_0) de la forme $U(t) = \lambda(t)Z(t) + \mu(t)(0;1)^T$, de sorte que (U, Z) soit une base de S_0, l'ensemble des solutions de (E_0).
3. Résoudre (E). (Indication : on pourra utiliser la méthode de variation des constantes).

Remarque : on a résolu un système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients non constants.

Exercice 41. : Résoudre les équations différentielles (C), (D) et (E), d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, données respectivement par

$$y'' \;=\; -y\,, \quad y'' \;=\; y \quad \text{et} \quad y^{(3)} \;=\; y\,.$$

Exercice 42. : Résoudre les équations différentielles (D) et (E), d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, données respectivement par

$$y'' \;=\; y \,+\, b_1(t) \quad \text{et} \quad y'' \;=\; -y \,+\, b_2(t)\,,$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $b_1(t) = t + e^t$ et $b_2(t) = 1$.

Exercice 43. : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation différentielle (E), d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par

$$y^{(n)} \;=\; 0\,.$$

Exercice 44. : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur strictement positive et S_0 l'ensemble des solutions de l'équation différentielle, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par $y''(t) = ty(t)$, pour tout $t \in I$.

1. Vérifier que S_0 est un espace vectoriel. On admet qu'il est de dimension 2.
2. Chercher un élément de S_0 sous la forme de la somme d'une série entière en choisissant I de manière appropriée.
3. En déduire S_0 pour le I précédent.

Exercice 45. : Pour $x \in]-1;1[$, on pose

$$f(x) \;=\; \int_1^{+\infty} \frac{dv}{v^2 - x}\,.$$

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) sur $]-1;1[$, d'inconnue $y :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall t \in]-1;1[\,, \quad x\,y'(t) \;=\; y(t) \,+\, f(t) \,-\, t/3\,.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1;1[$, $f(x)$ est bien définie. Vérifier que $f(0) = 1$.

2. Soit $x \in]-1;1[$. Montrer que, pour tout $T \geq 1$,

$$\int_1^T \frac{dv}{v^2 - x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot f_n(T) \quad \text{avec} \quad f_n(T) \;=\; \frac{1}{2n+1}\big(1 \,-\, T^{-2n-1}\big)\,.$$

3. En déduire que, tout $x \in]-1;1[$,

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}\,.$$

4. Vérifier que le rayon de convergence de la série entière précédente est 1. (En particulier, f est de classe C^∞).

5. Déduire du 3 une série entière s_0 solution de l'équation différentielle (E) sur $]-1;1[$ et vérifiant $s_0'(0) = 0$.

6. Soit z une solution de (E) sur $]-1;1[$. Montrer que $z - s_0$ est solution sur $]-1;1[$ de l'équation (E_0) d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $ty'(t) = y(t)$.

7. Résoudre l'équation (E_0) sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

8. En déduire que l'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est $\{y_k; k \in \mathbb{R}\}$, où $y_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $y_k(t) = kt$.

9. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1;1[$.

10. Montrer que, pour $x \in]-1;1[$,

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\ln\!\Big(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\Big)\,,\ \text{si } x > 0\,,\ \text{et } f(x) \;=\; \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}\,,\ \text{si } x < 0\,.$$