Théorème des bouts.

Exercice 60. : Vérifier si le théorème des bouts (et certains de ses corollaires) s'applique(nt) dans les exercices 48, 49, 50 et 51. Dans les exercices 48 et 50, vérifier que, près d'une borne finie du domaine de définition d'une solution maximale, la solution explose. Dans l'exercice 51, montrer directement que les solutions maximales non nulles ne sont pas globales.

Exercice 61. : Montrer que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à chacune des équations différentielles suivantes. Montrer que toutes les solutions maximales des équations différentielles suivantes sont globales.

$$y' = \sin(ty)\,, \quad \text{sur } \mathbb{R}^2\,;$$

$$y' = e^{-(t^2+ty+y^2)}\,, \quad \text{sur } \mathbb{R}^2\,;$$

$$y' = \frac{\cos(y)}{t}\,, \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}\,;$$

$$y' = \frac{|y|}{t}\,, \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}\,;$$

$$y' = \frac{y^2}{t\cdot(1+\|y\|^2)}\,, \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,.$$

Dans le dernier cas, on munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée à la base canonique. Précisément, pour $(k;\ell)\in\{1;2\}^2$, on considère les matrices $E^{(k\ell)}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par, pour $(i;j)\in\{1;2\}^2$, $E^{(k\ell)}_{ij}=\delta_{ik}\delta_{j\ell}$. La famille $(E^{(k\ell)})_{(k;\ell)\in\{1;2\}^2}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (la base canonique). La norme $\|\cdot\|$ est définie, pour

$$A = \sum_{(k;\ell)\in\{1;2\}^2} a_{kl}\cdot E^{(k\ell)}\,,$$

$$\text{par} \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{(k;\ell)\in\{1;2\}^2} a_{kl}^2}\,.$$

Exercice 62. : Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{1/2\}$ par, pour tout $t\in I$,

$$y'(t) = \frac{-3t^2}{1-2y(t)}\,.$$

1. Vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (E).

2. Soit $y_0 > 1/2$. Soit $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de (E) valant y_0 à $t = 0$. Montrer que J contient un intervalle du type $[a; +\infty[$.
   (Indication : on pourra dériver la fonction $2\alpha - 1$ et montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour $t > 0$ et $t \in J$, $\alpha'(t) \leq ct^2$.)

Exercice 63. : Soit (E) l'équation différentielle sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ donnée par, pour tout $t \in I$,

$$y'(t) = \frac{\cos\left(\sqrt{y(t)}\right)}{t}.$$

1. Vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (E).

2. Déterminer toutes les solutions maximales constantes de (E).

3. Soit $(t_0; y_0) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Soit $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ la solution maximale de (E) valant y_0 à $t = t_0$ avec $\pi^2/4 < y_0 < 9\pi^2/4$.

   a). Montrer que, pour tout $t \in J$, $\pi^2/4 < \alpha(t) < 9\pi^2/4$. En déduire que α est strictement décroissante.

   b). En déduire que $J = \mathbb{R}^{+*}$.

4. Soit $(t_0; y_0) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Soit $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ la solution maximale de (E) valant y_0 à $t = t_0$ avec $0 < y_0 < \pi^2/4$.

   a). Montrer que, pour tout $t \in J$, $0 < \alpha(t) < \pi^2/4$. En déduire que α est strictement croissante.

   b). Montrer que $\sup J = +\infty$.

   c). Montrer que $\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = \pi^2/4$.

   d). Montrer que $\inf J > 0$. (Indication : pour $(t; s)$ tel que $\inf J < t \leq s \leq t_0$, on pourra encadrer $\alpha'(s)$.) En déduire que $\lim_{t \to \inf J} \alpha(t) = 0$.

Exercice 64. : Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour tout $t \in I$, $y'(t) = y(t)^3$. Soit (F) l'équation différentielle d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour tout $t \in I$, $y'(t) = \sin(t) \cdot y(t)^2$.

1. Vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique aux deux équations.

2. Trouver une solution maximale de l'équation (E) dont le domaine de définition ne contient pas un intervalle du type $[a; +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

3. Trouver une solution maximale de l'équation (E) dont le domaine de définition ne contient pas un intervalle du type $]-\infty; a]$ avec $a \in \mathbb{R}$.

4. Même questions pour l'équation (F).

Exercice 65. : Soit $E = \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R};d\lambda)$ l'algèbre des fonctions essentiellement bornées sur $\mathbb{R}$, pour la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|g\|_\infty \;=\; \inf\big\{M \geq 0\,;\; \lambda\big(\{|g| > M\}\big) = 0\big\}\,.$$

Soit $F : E \longrightarrow E$ donnée par $F(g) = (1+g^2)^{-1}$.

1. Montrer que F est différentiable et que, pour tout $g \in E$, $DF(g)$ est la multiplication sur E par la fonction $-2g(1+g^2)^{-2}$.
2. En déduire que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation différentielle $y' = F(y)$ d'inconnue $y : I \longrightarrow E$.
3. Montrer que toutes les solutions maximales de cette équation sont globales.
4. Soit α une solution maximale de cette équation. Soit $f = \alpha(0)$.
   a). Montrer que $\lim_{\pm\infty} \alpha$ n'existe pas dans E.
   b). Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $g_t \in E$ donnée par $g_t(x) = t + f(x)(1+f(x)^2/3)$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$\alpha(t)\cdot\Big(1 + \frac{\alpha(t)^2}{3}\Big) \;=\; g_t\,.$$
   c). En déduire que $\lim_{\pm\infty} \|\alpha\|_\infty = +\infty$.