Suites et séries de fonctions.

Exercice 40. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x + n^{-1}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et préciser sa limite. Même question pour $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $g_n(x) = x + e^x n^{-1}$. Même question pour $h_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $h_n(x) = x + n^{-1}\sin(nx)$.

Exercice 41. : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) \; = \; \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2} \, .$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) \; = \; \frac{1}{2} \, .$$
3. La convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle est-elle uniforme ?

Exercice 42. : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 1$, $\varphi(x) = x+1$ si $x \in]-1;0]$ et $\varphi(x) = 1-x$ si $x \in]0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(x) = \varphi(x-n)$.

1. Représenter sur un même dessin les graphes de $\varphi = \varphi_0$, φ_2 et φ_5.
2. Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
3. La convergence de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle est-elle uniforme ?

Exercice 43. : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sin(\sqrt{x+4\pi^2 n^2})$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. (Indication : on pourra utiliser la 2π-périodicité de sinus).
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que
$$\sup_{x\in[0;+\infty[} f_n(x) \; = \; 1 \, .$$
3. La convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle est-elle uniforme ?

Exercice 44. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_n(z) = (1+z/n)^n$. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \leq x$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e^x. (Indication : on pourra utiliser le logarithme népérien).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f_n(x) \leq e^x$. Montrer que la fonction $g_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = e^x - f_n(x)$ est croissante.

3. Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \;\leq\; \sum_{k=0}^{n}\left|\left(\frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k} - 1\right)\frac{z^k}{k!}\right| + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}\,.$$

4. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [0;n] \cap \mathbb{N}$, $n! \leq (n-k)! \cdot n^k$.
5. En déduire que

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \;\leq\; e^{|z|} - f_n(|z|) \;=\; g_n(|z|)\,.$$

6. Soit $r \geq 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction exponentielle complexe, uniformément sur $C(0;r)$, le cercle de centre 0 et de rayon r.
7. Soit $r \geq 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction exponentielle complexe, uniformément sur $D(0;r]$, le disque fermé de centre 0 et de rayon r. (Indication : on pourra utiliser la croissance des fonctions g_n.)

Exercice 45. : Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in [0;1]$,

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\mathbb{1}_{]1/(k+1);1/k[}(x)\,.$$

Ici $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions en escaliers données par $f_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k)\mathbb{1}_{]1/(k+1);1/k[}$, c'est-à-dire montrer que, quand $n \to \infty$,

$$\sup_{x\in[0;1]}\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,\mathbb{1}_{]1/(k+1);1/k[}(x)\right| \;\longrightarrow\; 0\,.$$

3. Vérifier l'existence et calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,\mathbb{1}_{]1/(k+1);1/k[}\,.$$

   On trouve $\pi^2/6 - 1$.
4. Pourquoi f n'est-elle pas continue par morceaux ?

Exercice 46. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) \;=\; \frac{(-1)^n}{n+x^2}\,.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on note par S_N la somme partielle d'ordre N de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ satisfait à la règle spéciale des séries alternées. Elle est donc convergente et sa somme $S(x)$ vérifie, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S_{2p+1}(x) \;\leq\; S(x) \;\leq\; S_{2p+2}(x)\,. \tag{5}$$

1. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge-t-elle normalement ?
2. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\big|S(x) - S_N(x)\big| \leq \frac{1}{N}.$$

3. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge-t-elle uniformément vers S ?

Exercice 47. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right).$$

1. Montrer que, si $t \neq 0$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n(t)|$ diverge.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n(t)| \leq \ln(1 + 1/n)$.
3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement.
4. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est uniformément de Cauchy.
5. En déduire que

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Exercice 48. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction dérivable définie par

$$f_n(x) = \int_0^{x+\frac{1}{n}} e^{-t^2(1+\frac{1}{n})}\, dt.$$

1. Montrer que $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Montrer que $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{-x^2}$.
3. Montrer que la convergence de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers g est uniforme sur $[0;1]$.
4. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une primitive de g que l'on précisera (sans la calculer).

Exercice 49. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction dérivable $v_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $v_n(t) = \ln(t+n)$.

1. Montrer que $(v_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.
2. Que peut-on dire de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 50. : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = nx$.

1. Vérifier que le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement est $\{0\}$.
2. Construire une fonction $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $0 \leq \tau \leq 1$, $\tau(0) = 1$ et, pour $|x| \geq 1$, $\tau(x) = 0$. (Indication : utiliser l'exercice 39).

3. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $g_n = \tau \circ f_n$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on explicitera. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
4. Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $k_n = (n+1)^{-1/2} g_n$. Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Montrer que la suite $(k'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des dérivées converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Cette dernière convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? (Indication : montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\tau'(nx)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\tau'(y)| > 0$).

Exercice 51. : Théorème de Borel.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de nombres complexes. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$. Ici $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n$ième de f.

On note par χ la fonction f du 2 de l'exercice 39. On se donne une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k, $\lambda_k > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f_k(x) \;=\; \frac{a_k x^k}{k!} \cdot \chi(\lambda_k x)\,.$$

1. Vérifier que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\chi^{(n)}(y) = 0$ si $|y| \leq 1$ ou $|y| \geq 2$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \|\chi^{(n)}\|_\infty \;:=\; \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|\chi^{(n)}(y)\right| \;<\; +\infty\,.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que $f_k(x) = 0$ si $|x| \geq 2\lambda_k^{-1}$ et que $f_k(x) = 1$ si $|x| \leq \lambda_k^{-1}$.
3. Soit $\ell \in \mathbb{N}$ et $g_\ell : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_\ell(x) = x^\ell$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la dérivée $n$ième de g_ℓ est donnée par

$$g_\ell^{(n)}(x) \;=\; \ell(\ell-1)\cdots(\ell-n+1)\, x^{\ell-n} \;=\; \frac{\ell!}{(\ell-n)!}\, x^{\ell-n}\,,$$

avec la convention que $g_\ell^{(n)}(x) = 0$ si $n > \ell$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $b_n \geq 0$ tel que, pour tout $k \in [\![n+1; \rightarrow [\![$, on ait

$$\|f_k^{(n)}\|_\infty \;:=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_k^{(n)}(x)\right| \;\leq\; b_n \cdot 2^k |a_k| \cdot \lambda_k^{n-k}\,.$$

(Indication : on pourra utiliser la formule de Leibnitz pour calculer $f_k^{(n)}$).

5. On choisit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = 4^k(|a_k|+1) > 0$. Montrer que, pour tout n, la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k^{(n)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
6. Soit f la somme de la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$. Vérifier qu'elle est bien définie et que c'est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $f^{(n)}(0) = a_n$.