Cours d'Analyse, L1, 2021-2022.

Thierry Jecko
AGM, UMR 8088 du CNRS,
Département de mathématiques, site de Saint Martin,
2 avenue Adolphe Chauvin,
F-95302 Cergy-Pontoise cédex, France.
e-mail : jecko@math.cnrs.fr
page personnelle : http ://jecko.perso.math.cnrs.fr/

13-04-2022

Avertissement.

Le cours qui suit est une introduction élémentaire à la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, considérée comme un cours de mathématiques de niveau L1. Il présente une formulation mathématiquement rigoureuse des notions de limite et de continuité. Cette formulation est basée sur le calcul propositionnel, qui est considéré comme un prérequis à la lecture de ce cours. La construction de $\mathbb{R}$, avec les propriétés qui la caractérisent, est également un prérequis admis. Le cours utilise la notion de voisinage, préparant ainsi l'étude de la topologie des espaces normés (et éventuellement la topologie générale), qui sera faite dans les niveaux supérieurs. Une table des matières est disponible à la fin du texte.

À la différence de nombreux livres sur le sujet, ce cours s'efforce de démontrer en détails tous ses résultats, l'objectif étant de donner au lecteur un accès très précis aux arguments des preuves, au prix certes d'une certaine lourdeur dans la rédaction. L'auteur considère que l'effort fait dans ce cours pour décortiquer l'argumentation des résultats est nécessaire à une compréhension durable et profonde du sujet et à une utilisation fructueuse des résultats et des idées de ce cours dans les cours des niveaux supérieurs. Au lieu de laisser cette tâche au lecteur, il s'en est chargé.

Le présent cours sert de base à un cours réellement donné en amphi au niveau L1 en 2021-2022. Ne serait-ce que pour des questions de temps, l'ensemble du présent texte n'a pas été couvert lors des séances en salle. Par ailleurs, on peut légitimement considérer certains résultats du cours comme secondaires. L'auteur a cependant estimé utile de fournir un assez grand nombre de "compléments" à un cours "minimal" sur le sujet pour les raisons suivantes :

- Certains compléments ne sont jamais traités en détails pour des questions de temps mais sont quand même importants. C'est le cas d'une construction de l'exponentielle complexe, par exemple, et de ses conséquences sur l'exponentielle réelle et les logarithmes.

- La partie 8 fournit une contruction et une étude de plusieurs fonctions "usuelles". On peut considérer certaines de ces fonctions comme superflues. L'auteur a jugé utile de les inclure comme illustration de l'application de résultats de la partie 7.

- Certains résultats basiques (sur l'ensemble $\mathbb{N}$ notamment) sont souvent considérés comme admis (ou pire, comme "évidents"). Même si l'on ne prouve pas de tels résultats dans un cours en amphi, l'auteur a estimé utile, pour le lecteur soucieux de bien les comprendre, d'en fournir une preuve (cf. paragraphes 3.2.2 et 9.1, par exemple).

- Outre le fait de donner une introduction rigoureuse à la topologie normée de $\mathbb{R}$, l'objectif de ce texte est aussi de préparer et sensibiliser le lecteur à des notions, idées, méthodes, etc... qui sont employées dans des cours de mathématiques de niveaux supérieurs. Par exemple, la construction de l'exponentielle complexe met en avant le fait que cette application est un morphisme de groupe, sans le dire (cf. paragraphes 8.1 et 9.4). Par exemple, la notion de suite de Cauchy, qui est essentielle dans l'étude des séries, normalement traitée en L2, est introduite au paragraphe 3.8 et exploitée pour définir l'exponentielle complexe (cf. paragraphes 8.1 et 9.4).

- Enfin, l'auteur espère que ce texte s'avère utile aux étudiants préparant le CAPES ou l'Agrégation de mathématiques en leur fournissant une présentation rigoureuse de notions topologiques simples (ou simplifiées) dont ils ont vu ensuite des généralisations.

Dans chaque partie, on numérote chaque définition, proposition, lemme, théorème, corollaire, remarque, selon son ordre d'apparition dans ladite partie.

1 Préliminaires et notations.

Dans cette partie, on rappelle des notions et résultats basiques plus ou moins connus. On introduit aussi des notations. En particulier, on utilise les notations "$a := b$" ou "$b =: a$" pour dire que a est défini par b. Au niveau du calcul logique, on utilise les signes $\Longrightarrow$ (resp. $\Longleftrightarrow$) pour désigner une implication (resp. une équivalence). Ces signes n'apparaissent que placés entre deux propositions dans des formules mathématiques. On évitera de les utiliser dans du texte.

1.1 Ensembles et applications.

Dans ce cours, on se base sur une notion intuitive d'ensemble. On dira qu'un élément a d'un ensemble E appartient à E et on notera "$x \in E$". On utilisera les notions d'inclusion, de réunion et d'intersection d'ensembles. Étant donnés deux ensembles E et F, l'intersection $E \cap F$ de E et F est l'ensemble $\{x; x \in E \,\mathrm{et}\, x \in F\}$. La réunion $E \cup F$ de E et F est l'ensemble $\{x; x \in E \,\mathrm{ou}\, x \in F\}$. On note par $\emptyset$ l'ensemble vide c'est-à-dire l'ensemble sans élément. On dit que E est inclu dans F, on note $E \subset F$, si tous les éléments de E sont des éléments de F.
On rappelle que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments et si et seulement si l'un est inclu dans l'autre et l'autre est inclu dans le premier. On a donc, pour deux ensembles E et F, les équivalences :

$$(E = F) \iff \big(\forall x\,, \quad (x \in E) \iff (x \in F)\big) \iff \big((E \subset F) \quad \text{et} \quad (F \subset E)\big)\,.$$

Si un ensemble A est inclu dans un ensemble E, on dit que A est une partie de E. On note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Étant donnés deux ensembles E et F, on note par $E \times F$ le produit cartésien de E par F c'est-à-dire l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$. Lorsque $E = F$, on note $E \times F$ par E^2. De même, le produit $E \times E \times E$ est noté E^3. Plus généralement, le produit de n copies de E (où n est un entier naturel non nul) est noté E^n (avec la convention $E^1 = E$).
Une application f de E dans F est la donnée pour chaque $x \in E$ d'un unique élément de F que l'on note $f(x)$. On note alors $f : E \longrightarrow F$. Cela revient à se donner une partie G de l'ensemble $E \times F$ qui vérifie la propriété :

$$\forall\, x \in E\,, \quad \forall\, (y; y') \in F^2\,, \quad \Big(\big((x; y) \in G\big) \text{ et } \big((x; y') \in G\big)\Big) \implies \big(y = y'\big)\,.$$

On note par Id_E l'application de E dans E qui, à $x \in E$, associe x.
Soit $f : E \longrightarrow F$. Pour une partie A de E, l'image $f(A)$ de A par f est la partie de F définie par

$$f(A) := \{f(x)\,,\, x \in A\}\,.$$

Pour une partie B de F, l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de B par f est la partie de E définie par

$$f^{-1}(B) := \{x \in E\,;\, f(x) \in B\}\,.$$

Lorsqu'on a une application $f : E \longrightarrow F$ et une application $g : F \longrightarrow G$, on définit la composée de g par f comme étant l'application $(g \circ f) : E \longrightarrow G$ qui, à $x \in E$, associe $g(f(x))$.
On rappelle qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est dite injective si

$$\forall\, (x; x') \in E^2\,, \quad \big((f(x) = f(x')) \implies (x = x')\big)\,.$$

On dit qu'une telle application est surjective si

$$\forall\, y \in F\,, \quad \exists\, x \in E\,; \quad y = f(x)\,.$$

On remarque que cette dernière proposition est équivalente à $(f(E) = F)$.
Une telle application $f : E \longrightarrow F$ est dite bijective si elle est injective et surjective. Cette propriété est équivalente à

$$\forall\, y \in F\,, \quad \exists!\, x \in E\,; \quad y \;=\; f(x)\,.$$

Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est injective, on dit qu'elle est bijective de E sur son image $f(E)$ car l'application $f_1 : E \longrightarrow f(E)$ donnée par $f_1(x) = f(x)$ est bijective.
Prenons une application bijective $f : E \longrightarrow F$. L'application $g : F \longrightarrow E$ qui, à tout $y \in F$, associe l'unique solution de l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$, est bijective et on a $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Si $h : F \longrightarrow E$ vérifie $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors $h = g$. On appelle g la bijection réciproque de f et on la note $f^{\langle -1 \rangle}$.
On rappelle que la composée de deux applications injectives est injective, que la composée de deux applications surjectives est surjective. En particulier, la composée de deux applications bijectives est bijective.
On reviendra sur ces propriétés dans le paragraphe 7.1.

Une loi de composition interne sur un ensemble E est une application $* : (E \times E) \longrightarrow E$. Pour $(x; y) \in E^2$, on note l'image $*((x; y))$ de $(x; y)$ par $*$ aussi par $*(x; y)$ et par $x * y$.
On dit qu'une telle loi est commutative si

$$\forall\, (x; y) \in E^2\,, \quad x \,*\, y \;=\; y \,*\, x\,.$$

On dit qu'une telle loi est associative si

$$\forall\, (x; y; z) \in E^3\,, \quad x \,*\, (y \,*\, z) \;=\; (x \,*\, y) \,*\, z\,.$$

On dit qu'un élément e de E est un élément neutre pour la loi $*$ si

$$\forall\, x \in E\,, \quad x \,*\, e \;=\; e \,*\, x \;=\; x\,.$$

Si $*$ admet deux éléments neutres e et e' alors on a $e * e' = e'$, car e est un élément neutre, et $e * e' = e$, car e' est un élément neutre. Donc $e = e'$.
On dit qu'un élément $x \in E$ a un symétrique pour la loi $*$ d'élément neutre e s'il existe $y \in E$ tel que $x * y = e = \; y * x$.

On note par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, les ensembles de nombres entiers naturels, de nombres entiers relatifs, de nombres rationnels, de nombres réels et de nombres complexes, respectivement. On rappelle que l'addition dans $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$, resp. $\mathbb{Q}$, resp. $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$) est associative, commutative et a 0 pour élément neutre. Tout élément de $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Q}$, resp. $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$) admet un symétrique pour l'addition, appelé opposé. On rappelle que la multiplication dans $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$, resp. $\mathbb{Q}$, resp. $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$) est associative, commutative et a 1 pour élément neutre. Tout élément non nul de $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$) admet un symétrique pour la multiplication, appelé inverse. On rappelle que les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont munis d'une relation d'ordre, notée $\leq$.

1.2 Intervalles, bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$.

On rappelle que la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, notée $\leq$, vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall\, (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\,, \quad \Big((a \,+\, c \,\leq\, b \,+\, c) \iff (a \,\leq\, b) \Big)\,, \tag{1.1}$$

$$\forall\, (a; b) \in \mathbb{R}^2\,, \forall\, c > 0\,, \quad \Big((a \,\cdot\, c \,\leq\, b \,\cdot\, c) \iff (a \,\leq\, b) \Big)\,, \tag{1.2}$$

$$\forall\, (a; b) \in \mathbb{R}^2\,, \quad \Big((-a \,\leq\, -b) \iff (b \,\leq\, a) \Big)\,. \tag{1.3}$$

On rappelle que, pour $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, la proposition $(a < b)$ est, par définition, la proposition

$$\big((a \,\leq\, b) \quad \text{et} \quad (a \,\neq\, b) \big)\,.$$

Autrement dit, "$a < b$" signifie $a \leq b$ et $a \neq b$.

On **admet** la propriété suivante, dite propriété d'Archimède : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier naturel n plus grand que x, i.e.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exists\, n \in \mathbb{N}; \quad n \geq x\,. \tag{1.4}$$

On introduit maintenant les intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. On définit les notations suivantes :*

$$[a;b] \;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; a \leq x \text{ et } x \leq b\}\,, \quad [a;b[\;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; a \leq x \text{ et } x < b\}\,,$$

$$]a;b] \;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; a < x \text{ et } x \leq b\} \quad \text{et} \quad]a;b[\;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; a < x \text{ et } x < b\}\,.$$

On introduit les symboles $+\infty$ (dit "plus infini") et $-\infty$ (dit "moins infini") et on définit

$$[a;+\infty[\;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; a \leq x\}\,, \quad]a;+\infty[\;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; a < x\}\,,$$

$$]-\infty;a] \;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; x \leq a\} \quad \text{et} \quad]-\infty;a[\;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; x < a\}\,.$$

Les intervalles $]a;b[$, $]a;+\infty[$ et $]-\infty;a[$ sont dits ouverts, les intervalles $[a;b]$, $[a;+\infty[$ et $]-\infty;a]$ sont dits fermés. Les autres sont dits semi-ouverts.

Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont que des notations commodes pour décrire certains intervalles. Plus loin, on les utilisera aussi pour les notions de bornes supérieure et inférieure et de limite infinie. En tout cas, ils ne représentent pas des nombres réels. On ne les considère pas comme des éléments de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2. *Si x appartient à un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ alors il existe $(x_1;x_2) \in I^2$ avec $x_1 < x < x_2$. En particulier, on a $x \in]x_1;x_2[$ et $]x_1;x_2[\subset [x_1;x_2] \subset I$. On peut vérifier ce point en considérant séparément les trois cas d'intervalle ouvert.*

On donne certaines notions liées à la relation d'ordre "$\leq$" sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.3. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e. $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})$. Soit $m \in \mathbb{R}$.*
On dit que m majore A (m est un majorant de A) si

$$\forall a \in A\,, \quad a \leq m\,.$$

On dit que A est majorée si A admet un majorant dans $\mathbb{R}$, i.e. s'il existe un $m \in \mathbb{R}$ tel que m majore A.
On dit que m minore A (m est un minorant de A) si

$$\forall a \in A\,, \quad a \geq m\,.$$

On dit que A est minorée si A admet un minorant dans $\mathbb{R}$, i.e. s'il existe un $m \in \mathbb{R}$ tel que m minore A.
On dit que m est un (le) plus grand élément (un (le) maximum) de A si $m \in A$ et m majore A. Dans ce cas, on note $m = \max A$.
On dit que m est un (le) plus petit élément (un (le) maximum) de A si $m \in A$ et m minore A. Dans ce cas, on note $m = \min A$.

On peut vérifier que, lorsqu'une partie A a un plus grand élément alors celui-ci est unique. Ainsi les propositions (m est un plus grand élément de A) et (m est le plus grand élément de A) sont équivalentes. C'est pourquoi on a inséré "(le)" dans la définition de plus grand élément. On a bien sûr la même chose avec les plus petits éléments.

La partie $A := [0;1]$ de $\mathbb{R}$ est majorée. En effet 2 est un majorant de A. 3 aussi. 1 aussi. Comme 1 appartient à A, c'est le plus grand élément de A.

La partie $B := [0;1[$ est aussi majorée. Elle est majorée par 2, 3 et 7. Mais elle n'admet pas de plus grand élément. On peut vérifier ce fait en raisonnant par l'absurde.
Supposons que b soit le plus grand élément de B. Alors $b \in B$ et b majore B. Comme $b \in B$, $0 \leq b < 1$. Il existe $c \in]b;1[$ (par exemple $c = (1+b)/2$). On a $c \in B$ et $b < c$. Comme b majore B, b est plus grand que chaque élément de B, donc, en particulier, $b \geq c$. On a donc une contradiction avec $b < c$.
La partie $C = [3;+\infty[$ n'est pas majorée. Vérifions ce point.
Supposons qu'un réel m majore C. On a, en particulier, $m \geq 3$. Donc $m+1 \geq 3$ et $(m+1) \in C$. Comme m majore C, m est, en particulier, plus grand que $m+1$. Contradiction.
De manière similaire, on vérifie que A est minorée et que 0 est son minimum, que $]0;7[$ est minorée mais n'a pas de minimum, que l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas minoré.

Soit A un partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On **admet** que l'ensemble non vide des majorants de A a un plus petit élément. Autrement dit, on **admet** que l'ensemble non vide $\mathcal{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\ m \text{ majore } A\}$ a un minimum.
De même, pour une partie non vide et minorée A de $\mathbb{R}$, on **admet** que l'ensemble non vide des minorants de A a un plus grand élément. Autrement dit, on **admet** que l'ensemble non vide $\mathrm{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\ m \text{ minore } A\}$ a un maximum.

Ces deux propriétés ne sont pas valables pour les parties de $\mathbb{Q}$. On peut trouver une partie non vide et majorée A de $\mathbb{Q}$ telle que l'ensemble $\mathcal{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\ m \text{ majore } A\}$ n'a pas de minimum dans $\mathbb{Q}$. On peut aussi trouver une partie non vide et minorée A de $\mathbb{Q}$ telle que l'ensemble $\mathrm{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\ m \text{ minore } A\}$ n'a pas de maximum dans $\mathbb{Q}$.
L'absence de ces propriétés dans $\mathbb{Q}$ et leur importance pour les limites est l'une des raisons pour lesquelles on va travailler dans $\mathbb{R}$, dont la construction compliquée est admise.

Définition 1.4. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e. $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})$.*
Lorsque A est majorée, on appelle borne supérieure de A le plus petit majorant de A. C'est un nombre réel.
Lorsque A n'est pas majorée, on décide que la borne supérieure de A est $+\infty$.
Dans tous les cas, on note par $\sup A$ *la borne supérieure de A. C'est un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*
Lorsque A est minorée, on appelle borne inférieure de A le plus grand minorant de A. C'est un nombre réel.
Lorsque A n'est pas minorée, on décide que la borne inférieure de A est $-\infty$.
Dans tous les cas, on note par $\inf A$ *la borne inférieure de A. C'est un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.*

Il est commode d'utiliser la **convention** suivante : on décide que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et aussi à $-\infty$; on décide que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel. On décide que $+\infty$ (resp. $-\infty$) majore (resp. minore) toute partie non vide de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.5. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e. $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})$.*
On a $\inf A \leq \sup A$.
On a

$$\big((\sup A) \in A\big) \iff \big(A \textit{ admet un maximum}\big)$$

et, dans le cas où l'une des propositions est vraie, on a $\sup A = \max A$.
On a

$$\big((\inf A) \in A\big) \iff \big(A \textit{ admet un minimum}\big)$$

et, dans le cas où l'une des propositions est vraie, on a $\inf A = \min A$.

Preuve :

a). Soit $a \in A$. Par définition de $\inf A$, $\inf A$ minore A donc $\inf A \leq a$. Par définition de $\sup A$, $\sup A$ majore A donc $a \leq \sup A$. D'où $\inf A \leq a \leq \sup A$.

b). Preuve de la première équivalence :
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\sup A \in A$. Donc $\sup A$ est un réel et un majorant de A. Comme il appartient

à A, c'est le maximum de A.
$\Longleftarrow$) : On suppose que A admet un maximum m. m est un nombre réel qui majore A et qui appartient à A. A est donc majorée. Soit m' un majorant de A. m' majore tous les éléments de A, donc, en particulier, l'élément m. Donc $m' \geq m$. m est donc le plus petit majorant de A, i.e. $m = \sup A$.

c). Preuve de la deuxième équivalence :
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\inf A \in A$. Donc $\inf A$ est un réel et un minorant de A. Comme il appartient à A, c'est le minimum de A.
$\Longleftarrow$) : On suppose que A admet un minimum m. m est un nombre réel qui minore A et qui appartient à A. A est donc minorée. Soit m' un minorant de A. m' minore tous les éléments de A, donc, en particulier, l'élément m. Donc $m' \leq m$. m est donc le plus grand majorant de A, i.e. $m = \inf A$. $\square$

On a vu plus haut que 1 est le maximum de $[0;1]$. La proposition nous permet d'affirmer que $1 = \sup[0;1]$. De même, 0 est le minimum de $[0;1]$ et la proposition nous donne que $0 = \inf[0;1]$.
On a aussi vu que l'ensemble $[0;1[$ n'a pas de maximum. Mais il a forcément une borne supérieure. Quelle est-elle ? Comme cet ensemble est majorée par 5, $\sup[0;1[\in \mathbb{R}$. On devine que $\sup[0;1[= 1$. Vérifions-le. Pour simplifier l'écriture, on pose $A := [0;1[$.
Tout d'abord, 1 est bien un majorant de A. Montrons que c'est le plus petit majorant de A. Supposons le contraire. Il existe donc un majorant m de A tel que $m < 1$. Comme $(1+m)/2 \in]m;1[$ et $m \geq 0$, $(1+m)/2 \in [0;1[= A$. Comme m majore A, $m \geq (m+1)/2$ soit, par (1.2), $2m \geq m+1$ et, par (1.1), $m \geq 1$. Contradiction avec $m < 1$.
On a donc montré que 1 est le plus petit majorant de $[0;1[$, soit $\sup[0;1[= 1$.

1.3 Parties de $\mathbb{N}$ et théorèmes de récurrence.

Pour l'étude des suites, on va avoir besoin de quelques précisions sur les parties de $\mathbb{N}$. On donne aussi des théorèmes de récurrence.

Tout d'abord, on introduit une notation pour les intervalles de $\mathbb{N}$.

Définition 1.6. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. On définit les notations suivantes :*

$$[\![a;b]\!] \ := \ \{n \in \mathbb{N}\,;\ a \leq n \text{ et } n \leq b\}\,, \quad [\![a;b[\![\ := \ \{n \in \mathbb{N}\,;\ a \leq n \text{ et } n < b\}\,,$$
$$]\!]a;b]\!] \ := \ \{n \in \mathbb{R}\,;\ a < n \text{ et } n \leq b\} \quad \text{et} \quad]\!]a;b[\![\ := \ \{n \in \mathbb{N}\,;\ a < n \text{ et } n < b\}\,.$$

On définit aussi

$$[\![a;+\infty[\![:= \ \{n \in \mathbb{N}\,;\ a \leq n\}\,, \quad]\!]a;+\infty[\![\ := \ \{n \in \mathbb{N}\,;\ a < n\}\,.$$

Toute ces parties de $\mathbb{N}$ sont les intervalles de $\mathbb{N}$.

On remarque que, pour $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, $[\![a;b]\!] = [a;b] \cap \mathbb{N}$, $[\![a;b[\![= [a;b[\cap\mathbb{N}$, $]\!]a;b]\!] =]a;b] \cap \mathbb{N}$, $]\!]a;b[\![=]a;b[\cap\mathbb{N}$, $[\![a;+\infty[\![= [a;+\infty[\cap\mathbb{N}$ et $]\!]a;+\infty[\![=]a;+\infty[\cap\mathbb{N}$. On utilisera ces notations surtout dans le cas où a et b sont des entiers naturels.

On **admet** maintenant le théorème de récurrence suivant.

Théorème 1.7. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et, pour $n \in [\![n_0;+\infty[\![$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :*

$$\Big(\big(\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}\big) \quad \text{et} \quad \Big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,,\ \big(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)\big)\Big)\Big)$$
$$\implies \quad \big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,,\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\big)\,.$$

Voyons un exemple d'application de ce théorème. On veut montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad 2^n \,\geq\, n\,+\,1\,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soir $\mathcal{P}(n) = (2^n \geq n+1)$. Comme $2^0 = 1 \geq 0+1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a donc $2^n \geq n+1$. Donc $2{\cdot}2^n \geq 2n+2$ soit $2^{n+1} \geq 2(n+1) \geq n+2 = (n+1)+1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a donc montré que le membre de gauche de l'implication dans le théorème 1.7 est vrai pour $n_0 = 0$. Donc, le théorème nous donne la validité du membre de droite de cette implication et c'est exactement ce que l'on voulait démontrer.

A-t-on, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq 2n+1$? C'est vrai pour $n = 0$, faux pour $n = 1$ et $n = 2$. Cela semble vrai pour $n \geq 3$. Montrons-le par récurrence.
Pour $n \geq 3$ soit $\mathcal{Q}(n) = (2^n \geq 2n+1)$. On a $2^3 = 8 \geq 7 = 2 \cdot 3 + 1$. Donc $\mathcal{Q}(3)$ est vraie. Supposons que, pour un $n \geq 3$, $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie. On a donc $2^n \geq 2n+1$. Donc $2 \cdot 2^n \geq 2(2n+1)$. Comme, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$2(2p+1) \,\geq\, 2(p+1)+1 \iff 2p \geq 1 \iff p \,>\, 0\,,$$

on a, $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(2n+1) \geq 2(n+1)+1$, car $n \geq 3$. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ soit vraie. Par le théorème 1.7, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

Les variantes suivantes du théorème de récurrence sont parfois utiles. On **admet** leurs preuves.
Théorème de récurrence forte :

Théorème 1.8. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et, pour $n \in [\![n_0;+\infty[\![$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :*

$$\Big(\big(\mathcal{P}(n_0)\ \textit{est vraie}\big) \quad \textit{et} \quad \Big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,,\ \big(\forall k \in [\![n_0\,;\,n]\!]\,,\ \mathcal{P}(k)\big) \implies \mathcal{P}(n+1)\big)\Big)\Big)$$
$$\implies \quad \big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,,\ \mathcal{P}(n)\ \textit{est vraie}\big)\,.$$

Théorème de récurrence finie :

Théorème 1.9. *Soit $(n_0;n_1) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_0 < n_1$ et, pour tout $n \in [\![n_0;n_1]\!]$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :*

$$\Big(\big(\mathcal{P}(n_0)\ \textit{est vraie}\big) \quad \textit{et} \quad \Big(\forall n \in [\![n_0;n_1[\![\,,\ \big(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)\big)\Big)\Big)$$
$$\implies \quad \big(\forall n \in [\![n_0;n_1]\!]\,,\ \mathcal{P}(n)\ \textit{est vraie}\big)\,.$$

Théorème de récurrence descendante :

Théorème 1.10. *Soit $(n_0;n_1) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_0 < n_1$ et, pour tout $n \in [\![n_0;n_1]\!]$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :*

$$\Big(\big(\mathcal{P}(n_1)\ \textit{est vraie}\big) \quad \textit{et} \quad \Big(\forall n \in]\!]n_0;n_1]\!]\,,\ \big(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n-1)\big)\Big)\Big)$$
$$\implies \quad \big(\forall n \in [\![n_0;n_1]\!]\,,\ \mathcal{P}(n)\ \textit{est vraie}\big)\,.$$

On donne quelques précisions sur les ensembles finis.

Définition 1.11. *Soit E un ensemble non vide. On dit que E est un ensemble fini s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et des éléments $a_1;\cdots;a_p$ de E, deux à deux distincts, tels que $E = \{a_j; j \in [\![1;p]\!]\}$. Dans ce cas, p est unique et s'appelle le cardinal de E. Si E n'est pas fini, on dit qu'il est infini.*
On décide que l'ensemble vide, noté $\emptyset$, est fini de cardinal 0.

Le résultat suivant s'avèrera utile par la suite.

Proposition 1.12. *Soit A une partie non vide et finie de $\mathbb{R}$. Alors A admet un maximum et un minimum.*

Preuve : Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(p)$ la proposition : (toute partie de $\mathbb{R}$ de cardinal p admet un maximum et un minimum).
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ à un seul élément a. Comme $a \leq a$, a majore A et a minore A. Donc, par définition, $a = \max A$ et $a = \min A$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Soit $A = \{a; b\}$ une partie de $\mathbb{R}$ à deux éléments. Si $a \leq b$, on a $a = \min A$ et $b = \max A$. Si $a \geq b$, on a $b = \min A$ et $a = \max A$. Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ ayant $(p+1)$ éléments. On peut écrire A sous la forme $\{a_j; j \in [\![1; p+1]\!]\}$, avec des a_j deux à deux distincts. Soit $A' := \{a_j; j \in [\![1; p]\!]\}$. On a $A = A' \cup \{a_{p+1}\}$. Par l'hypothèse de récurrence, A' admet un maximum et un minimum. Soit $a_+ := \max(\max A'; a_{p+1}) \in A$ et $a_- := \min(\min A'; a_{p+1}) \in A$ (a_+ et a_- sont bien définis d'après $\mathcal{P}(2)$). On voit que a_+ majore A et que a_- minore A. Donc A admet a_+ pour maximum et a_- pour minimum. Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), on en déduit que $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Une partie A non vide et finie de $\mathbb{R}$ a forcément un cardinal $q \in \mathbb{N}^*$ donc, par $\mathcal{P}(q)$, A admet un maximum et un minimum. □

Voici une conséquence sur les parties de $\mathbb{N}$.

Proposition 1.13. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$.*

1. *Pour $q \in \mathbb{N}$, toute partie de $[\![0; q]\!]$ est finie.*
2. *On a même l'équivalence : A est finie si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $A \subset [\![0; q]\!]$.*
3. *On peut reformuler cette équivalence sous la forme :*
$$\Big(\big(A \text{ est infinie}\big) \iff \big(\forall\, p \in \mathbb{N}\,,\, \exists\, n \in A\,;\ n > p\big)\Big)\,.$$
4. *A admet un plus petit élément.*

Preuve :

1. Pour $q \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{Q}(q)$ la proposition : (Toute partie non vide de $[\![0; q]\!]$ est finie). La seule partie non vide de $[\![0; 0]\!]$ est $\{0\}$ et elle s'écrit bien $\{a_0\}$ pour un $a_0 \in \mathbb{N}$. Donc elle est finie. Supposons que $\mathcal{Q}(q)$ soit vraie pour un $q \in \mathbb{N}$. Soit B une partie de $[\![0; q+1]\!]$. Si $q+1 \notin B$, alors $B \subset [\![0; q]\!]$ et B est finie par l'hypothèse de récurrence. Si $q+1 \in B$ alors $B = C \cup \{q+1\}$ avec $C \subset [\![0; q]\!]$. Par hypothèse de récurrence, il existe $p \in \mathbb{N}$ et des éléments $b_1; \cdots; b_p$ de $\mathbb{N}$, deux à deux distincts, tels que $C = \{b_j; j \in [\![1; q]\!]\}$. En posant, $b_{q+1} = q+1$, on a $B = \{b_j; j \in [\![1; q+1]\!]\}$, les b_j étant deux à deux distincts. Donc B est finie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.
La partie vide de $[\![0; q]\!]$ est aussi finie, d'après la définition 1.11.
2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$.
$\Longrightarrow$) : On suppose que A est finie. Par la proposition 1.12, A admet un maximum q. Comme q majore A et, bien sûr, 0 minore A, on a $A \subset [\![0; q]\!]$.
$\Longleftarrow$) : On suppose que $A \subset [\![0; q]\!]$, pour un $q \in \mathbb{N}$. D'après $\mathcal{Q}(q)$, A est finie.
3. On a
$$\begin{aligned}\big(A \,\text{est infinie}\big) &\iff \text{non}\,\big(A \,\text{est finie}\big) \iff \text{non}\,\big(\exists\, p \in \mathbb{N}\,;\ A \subset [\![0; p]\!]\big)\\ &\iff \big(\forall\, p \in \mathbb{N}\,,\, A \not\subset [\![0; p]\!]\big) \iff \big(\forall\, p \in \mathbb{N}\,,\, \exists\, n \in A\,;\ n > p\big)\,.\end{aligned}$$
4. Comme la partie A est non vide, il existe $a_0 \in A$. La partie $A \cap [\![0; a_0]\!]$ est non vide puisqu'elle contient $a_0 \in \mathbb{N}$. Elle est contenue dans $[\![0; a_0]\!]$ donc elle est finie (d'après le premier résultat). Par la proposition 1.12, elle admet donc un minimum a_-. On vérifie que a_- est le minimum de A.
Soit $a \in A$. Si $a \leq a_0$, a appartient à $A \cap [\![0; a_0]\!]$ donc $a_- \leq a$. Si $a \geq a_0$ alors, comme a_0 appartient à $A \cap [\![0; a_0]\!]$, on a $a_- \leq a_0$ d'où $a_- \leq a_0 \leq a$. On a montré que a_- est le minimum de A. □

Les intervalles $[\![a;b]\!]$ avec $a \leq b$ et $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ sont finis. Les intervalles $]\!]a;+\infty[\![$ avec $a \in \mathbb{N}$, sont infinis. Les ensembles

$$2\mathbb{N} := \{2n\,;\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad 2\mathbb{N}+1 := \{2n+1\,;\ n \in \mathbb{N}\}$$

sont infinis. On peut vérifier ces infinitudes en procédant par l'absurde.
On remarque, de plus, qu'une partie infinie D de $\mathbb{N}$ est une partie non majorée de $\mathbb{R}$.

2 Voisinages dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

On introduit plusieurs notions de voisinage dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. Celles-ci seront utiles pour la définition des limites de suite et de fonction.

2.1 Voisinages d'un point dans $\mathbb{C}$.

On rappelle que la fonction module est la fonction $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par, pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}\,, \tag{2.1}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z. Elle possède les propriétés suivantes : le module du zéro de $\mathbb{C}$ est nul, le module d'un nombre complexe non nul est strictement positif, le module d'un produit est le produit des modules, le module d'une somme est inférieur ou égal à la somme de modules. Autrement dit, on a :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \big(|z| = 0 \iff z = 0\big)\,,$$

$$\forall\, (z;z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad |zz'| = |z| \cdot |z'|$$

et

$$\forall\, (z;z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|\,. \tag{2.2}$$

La propriété (2.2) s'appelle l'inégalité triangulaire. Une formulation équivalente de cette proposition est

$$\forall\, (z;z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad \big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|\,. \tag{2.3}$$

En désignant, pour $z \in \mathbb{C}$, par $\Re(z)$ sa partie réelle et par $\Im(z)$ sa partie imaginaire, on a

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \Big(\big(|\Re(z)| \leq |z|\big) \quad \text{et} \quad \big(|\Im(z)| \leq |z|\big)\Big)\,. \tag{2.4}$$

Définition 2.1. *Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on pose*

$$D(z_0;r[\ := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - z_0| < r\} \quad \text{et} \quad D(z_0;r] := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - z_0| \leq r\}\,.$$

Le premier ensemble est le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r tandis que le second est le disque fermé de centre z_0 et de rayon r.

On remarque que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, $D(z_0;0[$ est vide et $D(z_0;0]$ est le singleton $\{z_0\}$. Lorsque $r > 0$, on peut vérifier que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, $D(z_0;r[$ et $D(z_0;r]$ sont des ensembles infinis. En effet, ils contiennent tous les deux l'ensemble infini

$$\left\{z_0 + \frac{r}{2n}\,;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

On remarque aussi que la restriction à $D(z_0;r]$ de la fonction module est majorée par $|z_0| + r$. On pourra vérifier ce point en utilisant (2.3).

Considérons deux disques ouverts (resp. fermés), l'un de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r_0 \in \mathbb{R}^+$ et l'autre de centre $z_1 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r_1 \in \mathbb{R}^+$. À quelle condition les deux disques s'intersectent-ils ? On peut vérifier que, lorsque $r_0 > 0$ et $r_1 > 0$, on a

$$D(z_0; r_0[\cap D(z_1; r_1[\neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| < r_0 + r_1 \tag{2.5}$$

et que, lorsque $r_0 \geq 0$ et $r_1 \geq 0$, on a

$$D(z_0; r_0] \cap D(z_1; r_1] \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| \leq r_0 + r_1 \,.$$

À quelle condition l'un est-il inclu dans l'autre ? On peut vérifier que, lorsque $r_0 > 0$, on a

$$D(z_0; r_0[\subset D(z_1; r_1[\quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| + r_0 \leq r_1$$

et que, lorsque $r_0 \geq 0$, on a

$$D(z_0; r_0] \subset D(z_1; r_1] \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| + r_0 \leq r_1 \,.$$

Définition 2.2. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{C}$ est un voisinage (complexe) de z_0 s'il existe $r > 0$ tel que le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r soit inclu dans A, i.e. tel que $D(z_0; r[\subset A$. On note par $\mathcal{V}_{z_0}$ l'ensemble des voisinages (complexes) de z_0.*

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Les disques ouverts $D(z_0; r_0[$, pour $r_0 > 0$, sont tous des voisinages de z_0. Les disques fermés $D(z_0; r_0]$, pour $r_0 > 0$, sont tous aussi des voisinages de z_0. Mais z_0 admet des voisinages qui ne sont pas des disques. Par exemple, les ensembles

$$\big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Re(z - z_0) \in [-1; 1]\big\} \quad \text{et} \quad \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z - z_0) \in]-1; 2]\big\}$$

sont des voisinages de z_0. En effet, on peut vérifier qu'ils contiennent tous les deux le disque ouvert $D(z_0; 1/2[$. En revanche, l'ensemble

$$B := \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z - z_0) \geq 0\big\}$$

n'est pas un voisinage de z_0. Vérifions ce point en raisonnant par l'absurde. Supposons que B soit un voisinage de z_0. Alors, par définition, il existe un $r > 0$ tel que $D(z_0; r[\subset B$. Le nombre complexe $z_0 - ir/2$ appartient au disque $D(z_0; r[$ car $|(z_0 - ir/2) - z_0| = |-ir/2| = r/2 < r$. Donc, par l'inclusion précédente, il appartient aussi à B. On doit donc avoir $\Im((z_0 - ir/2) - z_0) \geq 0$. Or $\Im((z_0 - ir/2) - z_0) = \Im(-ir/2) = -r/2 < 0$. Contradiction. On a donc montré par l'absurde que B n'est pas un voisinage de z_0.

Proposition 2.3. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.*

1. *Un voisinage de z_0 contient forcément z_0 comme élément, i.e.*

$$\forall\, A \in \mathcal{V}_{z_0}\,, \quad z_0 \in A\,.$$

2. *L'intersection de deux voisinages de z_0 est un voisinage de z_0, i.e.*

$$\forall\, (A; B) \in (\mathcal{V}_{z_0})^2\,, \quad A \cap B \in \mathcal{V}_{z_0}\,.$$

3. *Une partie de $\mathbb{C}$ contenant un voisinage de z_0 est elle-même un voisinage de z_0, i.e.*

$$\forall\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{C})\,, \Big(\big(\exists\, B \in \mathcal{V}_{z_0}\,;\ B \subset A\big) \implies A \in \mathcal{V}_{z_0}\Big)\,.$$

4. *Si z_1 est un nombre complexe différent de z_0 alors on peut trouver un voisinage de z_0 et un de z_1 qui ne se rencontrent pas, i.e., pour $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$,*

$$\exists\, (A; B) \in \mathcal{V}_{z_0} \times \mathcal{V}_{z_1}\,; \quad A \cap B = \emptyset\,.$$

Preuve :

1. Pour $A \in \mathcal{V}_{z_0}$, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0; r[\subset A$. Comme $z_0 \in D(z_0; r[$, $z_0 \in A$.
2. Soit $(A; B) \in (\mathcal{V}_{z_0})^2$. Par définition, il existe donc $r_A > 0$ et $r_B > 0$ tels que $D(z_0; r_A[\subset A$ et $D(z_0; r_B[\subset B$. Soit $r = \min(r_A; r_B) > 0$. On a $D(z_0; r[\subset D(z_0; r_A[\subset A$ et $D(z_0; r[\subset D(z_0; r_B[\subset B$ donc $D(z_0; r[\subset A \cap B$. $A \cap B$ est bien un voisinage de z_0.
3. Soit A une partie de $\mathbb{C}$ contenant un voisinage B de z_0. Il existe donc $r > 0$ tel que $D(z_0; r[\subset B$. Comme $B \subset A$, on a $D(z_0; r[\subset A$, donc $A \in \mathcal{V}_{z_0}$.
4. Prenons $z_1 \neq z_0$ dans $\mathbb{C}$. Donc $|z_1 - z_0| > 0$. Soit $r = |z_1 - z_0|/2 > 0$. Pour $r_1 = r$ et $r_2 = r$, le membre de droite de l'équivalence (2.5) est faux donc celui de gauche aussi. Les disques $D(z_0; r[$ et $D(z_0; r_1[$ sont donc disjoints. Comme $r > 0$, le premier est un voisinage de z_0 et le deuxième un voisinage de z_1. On a montré la dernière propriété. □

2.2 Voisinages d'un point dans $\mathbb{R}$.

La restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction module s'appelle la fonction valeur absolue et on la note aussi $|\cdot|$. On a donc $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Les propriétés du module se transmette à la valeur absolue. On a donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \big(|x| = 0 \iff x = 0\big)\,,$$

$$\forall\, (x; x') \in \mathbb{R}^2\,, \quad |xx'| \;=\; |x| \cdot |x'|\,,$$

$$\forall\, (x; x') \in \mathbb{R}^2\,, \quad |x + x'| \;\leq\; |x| \,+\, |x'| \tag{2.6}$$

et

$$\forall\, (x; x') \in \mathbb{R}^2\,, \quad \big||x| \,-\, |x'|\big| \;\leq\; |x \,-\, x'|\,. \tag{2.7}$$

La propriété (2.6) est l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et la proposition (2.7) en est une reformulation équivalente. On remarque que, pour $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ est le maximum de x et $-x$, i.e. $|x| = \max(x; -x)$.

On introduit maintenant dans $\mathbb{R}$ une notion similaire à la notion de disque dans $\mathbb{C}$.

Définition 2.4. *Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on pose*

$$I(x_0; r[\;:=\; \big\{x \in \mathbb{R}\,;\; |x \,-\, x_0| \,<\, r\big\} \quad \textit{et} \quad I(x_0; r] \;:=\; \big\{x \in \mathbb{R}\,;\; |x \,-\, x_0| \,\leq\, r\big\}\,.$$

On appelle ces ensembles l'intervalle ouvert centré en x_0 de rayon r et l'intervalle fermé centré en x_0 de rayon r, respectivement.

On verra plus loin pourquoi on a choisi le nom “intervalle” dans cette définition (cf. proposition 2.7). On remarque que, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$,

$$I(x_0; r[\;=\; D(x_0; r[\cap \mathbb{R} \quad \text{et} \quad I(x_0; r] \;=\; D(x_0; r] \cap \mathbb{R}\,.$$

On peut aussi déterminer à quelle condition deux tels intervalles du même type s'intersectent. On peut vérifier, pour $(x_0; x_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(r_0; r_1) \in (\mathbb{R}^+)^2$, que, lorsque $r_0 > 0$ et $r_1 > 0$, on a

$$I(x_0; r_0[\cap I(x_1; r_1[\;\neq\; \emptyset \quad \iff \quad |x_0 - x_1| \,<\, r_0 + r_1$$

et que, lorsque $r_0 \geq 0$ et $r_1 \geq 0$, on a

$$I(x_0; r_0] \,\cap\, I(x_1; r_1] \;\neq\; \emptyset \quad \iff \quad |x_0 - x_1| \,\leq\, r_0 + r_1\,.$$

À quelle condition l'un est-il inclu dans l'autre ? On peut vérifier que, lorsque $r_0 > 0$, on a

$$I(x_0; r_0[\subset I(x_1; r_1[\quad \iff \quad |x_0 - x_1| \,+\, r_0 \,\leq\, r_1$$

et que, lorsque $r_0 \geq 0$, on a

$$I(x_0; r_0] \,\subset\, I(x_1; r_1] \quad \iff \quad |x_0 - x_1| \,+\, r_0 \,\leq\, r_1\,.$$

Définition 2.5. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est un voisinage (réel) de x_0 s'il existe $r > 0$ tel que l'intervalle ouvert centré en x_0 et de rayon r soit inclu dans A, i.e. tel que $I(x_0; r[\subset A$. On note par $\mathcal{V}_{x_0}$ l'ensemble des voisinages (réels) de x_0.*

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, les intervalles ouverts (resp. fermés) centrés en x_0 et de rayon $r > 0$ sont des voisinages de x_0 et sont des ensembles infinis. Le singleton $\{x_0\}$, en revanche, n'est pas un voisinage de x_0. En effet, il ne peut contenir un $I(x_0; r[$ avec $r > 0$, qui est infini, puisqu'il est un ensemble fini.

Proposition 2.6. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.*

1. *Un voisinage de x_0 contient forcément x_0 comme élément, i.e.*
$$\forall\, A \in \mathcal{V}_{x_0}\,, \quad x_0 \in\ A\,.$$
2. *L'intersection de deux voisinages de x_0 est un voisinage de x_0, i.e.*
$$\forall\,(A;B) \in (\mathcal{V}_{x_0})^2\,, \quad A \cap B\ \in\ \mathcal{V}_{x_0}\,.$$
3. *Une partie de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de x_0 est elle-même un voisinage de x_0, i.e.*
$$\forall\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,,\ \Big((\exists\, B \in \mathcal{V}_{x_0}\,;\ B \subset A) \implies A \in \mathcal{V}_{x_0} \Big)\,.$$
4. *Si x_1 est un nombre réel différent de x_0 alors on peut trouver un voisinage de x_0 et un de x_1 qui ne se rencontrent pas, i.e., pour $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$,*
$$\exists\,(A;B) \in \mathcal{V}_{x_0} \times \mathcal{V}_{x_1}\,; \quad A \cap B\ =\ \emptyset\,.$$

Preuve : On peut suivre la preuve de la proposition 2.3. □

Attention : Pour alléger les notations, on a noté, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, de la même façon $\mathcal{V}_{x_0}$ deux ensembles différents : l'ensemble des voisinages réels de x_0 et l'ensemble des voisinages complexes du complexe x_0. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C};\, \Re(z) \in]-1;1[\,, \Im(z) = 0\}$ peut être vu comme une partie de $\mathbb{R}$ et, en tant que telle, c'est un voisinage réel de 0. Comme partie de $\mathbb{C}$, ce n'est pas un voisinage complexe de 0.
Quand on utilise le mot "voisinage" ou la notation $\mathcal{V}_{x_0}$, il y a donc un risque de confusion et, dans ce cas, on précisera "voisinage réel" ou "voisinage complexe", "$\mathcal{V}_{x_0}$" dans $\mathbb{R}$ ou "$\mathcal{V}_{x_0}$" dans $\mathbb{C}$.

Vérifions maintenant que les intervalles centrés en un point sont bien des intervalles.

Proposition 2.7. *Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, $I(x_0; r[=]x_0 - r; x_0 + r[$ et $I(x_0; r]\ =\ [x_0 - r; x_0 + r]$. Autrement dit, pour $x \in \mathbb{R}$, les deux équivalences suivantes sont vraies :*
$$\big(|x\,-\,x_0|\ <\ r\big) \iff \big(x_0 - r\ <\ x\ <\ x_0 + r\big)\,,$$
$$\big(|x\,-\,x_0|\ \leq\ r\big) \iff \big(x_0 - r\ \leq\ x\ \leq\ x_0 + r\big)\,.$$

Preuve : Notons que la première équivalence est aussi $(x \in I(x_0; r[\iff x \in]x_0 - r; x_0 + r[)$, la seconde est aussi $(x \in I(x_0; r] \iff x \in [x_0 - r; x_0 + r])$. La validité de ces équivalences donnent donc les égalités d'ensembles annoncées.
En utilisant (1.1) puis (1.3), on a
$$\big(x_0 - r\ <\ x\ <\ x_0 + r\big) \iff \big(-r\ <\ x\,-\,x_0\ <\ r\big) \iff \Big(\big(x\,-\,x_0\ <\ r\big) \text{ et } \big(-(x\,-\,x_0)\ <\ r\big)\Big)$$
et, en utilisant le fait que, pour $a \in \mathbb{R}$, $|a| = \max(-a; a)$, on a
$$\Big(\big(x\,-\,x_0\ <\ r\big) \text{ et } \big(-(x\,-\,x_0)\ <\ r\big)\Big) \iff \big(|x\,-\,x_0|\ <\ r\big)\,.$$
On a montré la première équivalence. Pour montrer l'autre, on peut suivre les mêmes arguments en remplaçant partout les "$<$" par des "$\leq$". □

On peut maintenant donner une caractérisation des voisinages d'un point dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.8. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Une partie A de $\mathbb{R}$ est un voisinage de x_0 si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I qui contient x_0 et qui est inclu dans A. Autrement dit : $A \in \mathcal{V}_{x_0}$ si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I tel que*

$$I \subset A \quad et \quad x_0 \in I\ .$$

Preuve :
$\Longrightarrow$) : On suppose que A est un voisinage de x_0. Il existe donc $r > 0$ tel que $I(x_0; r[\subset A$. On a $x_0 \in I(x_0; r[$ et $I(x_0; r[$ est un intervalle ouvert par la proposition 2.7.
$\Longleftarrow$) : On suppose qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et inclu dans A. On sait qu'il existe $(x_1; x_2) \in I^2$ tel que $x_0 \in]x_1; x_2[$ et $]x_1; x_2[\subset I$ (cf. remarque 1.2). Soit $r = \min(|x_0 - x_1|; |x_0 - x_2|) > 0$. On va montrer que $I(x_0; r[\subset]x_1; x_2[$. Si $x \in I(x_0; r[$, on a, par la proposition 2.7,

$$x_1 \;=\; x_0 - |x_0 - x_1| \;\leq\; x_0 - r \;<\; x \;<\; x_0 + r \;\leq\; x_0 + |x_0 - x_2| \;=\; x_2\ .$$

Donc $x \in]x_1; x_2[$. On a montré que $I(x_0; r[\subset]x_1; x_2[$. Or $]x_1; x_2[\subset I$ et $I \subset A$ donc $I(x_0; r[\subset A$. A est donc un voisinage de x_0. $\square$.

La notion suivante sera aussi importante pour l'étude des limites.

Définition 2.9. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que x_0 est un point adhérent à A si, pour tout $r > 0$, $I(x_0; r[$ rencontre A, i.e. $I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset$.*

4 est un point adhérent à $[1; 7[$ puisque tout voisinage de 4 rencontre $[1; 7[$ en, au moins, 4. On peut vérifier que 7 est aussi un point adhérent à $[1; 7[$. Mais 0 n'est pas adhérent à $[1; 7[$ car l'intervalle ouvert $]-1; 1[$ centré en 0 ne rencontre pas $[1; 7[$.

Proposition 2.10. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Tout élément de A est un point adhérent à A. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :*

$$(x_0 \text{ est un point adhérent à } A) \iff (\mathbb{R} \setminus A) \notin \mathcal{V}_{x_0}\ .$$

Preuve : Prenons un $x_0 \in A$. Pour tout $r > 0$, $x_0 \in I(x_0; r[$ donc $x_0 \in I(x_0; r[\cap A$ et $I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset$. On a montré que x_0 est adhérent à A.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Dire que $I(x_0; r[$ rencontre A équivaut à dire que $I(x_0; r[$ n'est pas inclu dans le complémentaire de A, c'est-à-dire :

$$I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset \iff I(x_0; r[\not\subset (\mathbb{R} \setminus A)\ .$$

On a donc

$$\begin{aligned}
(x_0 \text{ est un point adhérent à } A) &\iff \big(\forall\, r > 0\,, \quad I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset\big)\\
&\iff \big(\forall\, r > 0\,, \quad I(x_0; r[\not\subset (\mathbb{R} \setminus A)\big)\\
&\iff \text{non } \big(\exists\, r > 0\,, \quad I(x_0; r[\subset (\mathbb{R} \setminus A)\big)\\
&\iff (\mathbb{R} \setminus A) \notin \mathcal{V}_{x_0}\ .
\end{aligned}$$

On obtient donc l'équivalence cherchée. $\square$

2.3 Voisinages, dans $\mathbb{R}$, de $+\infty$ et de $-\infty$.

Pour l'étude des limites, il sera commode de disposer d'une notion de voisinage réel pour les symboles $+\infty$ et $-\infty$.

Définition 2.11. *Soit A un partie de $\mathbb{R}$.*
On dit que A est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a;+\infty[\subset A$.
On dit que A est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty;a[\subset A$.
On note par $\mathcal{V}_{+\infty}$ (resp. $\mathcal{V}_{-\infty}$) l'ensemble des voisinages de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Proposition 2.12. *Soit $X \in \{-\infty;+\infty\}$.*

1. *L'intersection de deux voisinages de X est un voisinage de X, i.e.*

$$\forall (A;B) \in (\mathcal{V}_X)^2 \,, \quad A \cap B \ \in \ \mathcal{V}_X \,.$$

2. *Une partie de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de X est elle-même un voisinage de X, i.e.*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,, \ \Big((\exists B \in \mathcal{V}_X \,; \ B \subset A) \implies A \in \mathcal{V}_X \Big) \,.$$

3. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On peut trouver un voisinage de $-\infty$, un voisinage de a et un voisinage de $+\infty$ qui ne se rencontrent pas, deux à deux, i.e.*

$$\exists (A;B;C) \in \mathcal{V}_{-\infty} \times \mathcal{V}_a \times \mathcal{V}_{+\infty} \,; \quad \big((A \cap B \ = \ \emptyset) \ \textit{et} \ (A \cap C \ = \ \emptyset) \ \textit{et} \ (B \cap C \ = \ \emptyset) \big) \,.$$

Preuve : On fait la preuve dans le cas où $X = +\infty$. L'autre cas est similaire.

1. Soit $(A;B) \in (\mathcal{V}_{+\infty})^2$. Il existe donc $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $]a;+\infty[\subset A$ et $]b;+\infty[\subset B$. Soit $c = \max(a;b)$. On a $]c;+\infty[\subset]a;+\infty[\subset A$ et $]c;+\infty[\subset]b;+\infty[\subset B$ donc $]c;+\infty[\subset (A \cap B)$. Donc $(A \cap B) \in \mathcal{V}_{+\infty}$.
2. Soit $(A;B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^2$ tel que $B \subset A$ et $B \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $]b;+\infty[\subset B$. Comme $B \subset A$, on a aussi $]b;+\infty[\subset A$ donc $A \in \mathcal{V}_{+\infty}$.
3. Soit $\delta > 0$, $A :=]-\infty;a-\delta[$, $B := I(a;\delta[=]a-\delta;a+\delta[$ et $C :=]a+\delta;+\infty[$. On a $A \in \mathcal{V}_{-\infty}$, $B \in \mathcal{V}_a$ et $C \in \mathcal{V}_{+\infty}$. De plus, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$. □

Contrairement aux voisinages d'un point, qui contiennent le point en question, un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) ne contient pas $+\infty$ (resp. $-\infty$) puisqu'il est une partie de $\mathbb{R}$ et $+\infty \notin \mathbb{R}$ (resp. $-\infty \notin \mathbb{R}$). Pour $a \in \mathbb{R}$, les intervalles $]a;+\infty[$ et $[a;+\infty[$ sont des voisinages de $+\infty$. L'ensemble $\{0\} \cup [1;+\infty[$ n'est pas un intervalle mais est un voisinage de $+\infty$. En revanche, $\mathbb{N}$ n'est pas un voisinage de $+\infty$.

Définition 2.13. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*
On dit que $+\infty$ est adhérent à A si tout voisinage de $+\infty$ rencontre A, i.e.

$$\forall B \in \mathcal{V}_{+\infty} \,, \quad A \cap B \neq \ \emptyset \,.$$

On dit que $-\infty$ est adhérent à A si tout voisinage de $-\infty$ rencontre A, i.e.

$$\forall B \in \mathcal{V}_{-\infty} \,, \quad A \cap B \neq \ \emptyset \,.$$

On remarque que $+\infty$ est adhérent à $[1;+\infty[$. En utilisant la propriété d'Archimède (1.4), on peut vérifier que $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{N}$.

Pour l'étude des limites de suites, il est utile d'introduire la notion de voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord que, d'après la proposition 1.13, $+\infty$ n'est pas adhérent à une partie finie de $\mathbb{N}$ mais est adhérent à une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Définition 2.14. *Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On dit que A est un voisinage dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $]\!]a;+\infty[\![\subset A$. On note par $\mathcal{V}^{\mathbb{N}}_{+\infty}$ l'ensemble des voisinages dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$.*
Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. On dit qu'une partie A de D est un voisinage dans D de $+\infty$ si c'est la trace sur D d'un voisinage dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$, i.e. s'il existe $B \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}_{+\infty}$ tel que $A = D \cap B$. On note par $\mathcal{V}^{D}_{+\infty}$ l'ensemble des voisinages dans D de $+\infty$.

Pour une partie infinie D de $\mathbb{N}$, les voisinages dans D de $+\infty$ ne sont pas vides, puisque $+\infty$ est adhérent à D.

Proposition 2.15. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$.*

1. *L'intersection de deux voisinages dans D de $+\infty$ est un voisinage dans D de $+\infty$, i.e.*
$$\forall (A;B) \in (\mathcal{V}^D_{+\infty})^2\,, \quad A \cap B \ \in \ \mathcal{V}^D_{+\infty}\,.$$
2. *Une partie de D contenant un voisinage dans D de $+\infty$ est elle-même un voisinage dans D de $+\infty$, i.e.*
$$\forall\, A \in \mathcal{P}(D)\,, \ \Big((\exists\, B \in \mathcal{V}^D_{+\infty}\,;\ B \subset A) \implies A \in \mathcal{V}^D_{+\infty} \Big)\,.$$

Preuve : On peut suivre la preuve de la proposition 2.12. □.

L'ensemble $\{3\} \cup [\![9;+\infty[\![$ est un voisinage dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$ mais $2\mathbb{N}$ n'est pas un voisinage dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$. Considérons l'ensemble $C = \{2p; p \in [\![3;+\infty[\![\}$. Comme $C = [\![6;+\infty[\![\cap (2\mathbb{N})$ et $[\![6;+\infty[\![$ est un voisinage dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$, C est la trace sur $2\mathbb{N}$ d'un voisinage dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$ donc C est un voisinage dans $2\mathbb{N}$ de $+\infty$.

3 Suites réelles et complexes.

L'objet de cette partie est d'introduire la notion de suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et définir une notion de limite pour de telles suites.

3.1 Définitions et premiers exemples.

On introduit ici les notions de suite réelle et de suite complexe simultanément. Pour ce faire, le symbole $\mathbb{K}$ désignera soit $\mathbb{R}$, pour les suites réelles, soit $\mathbb{C}$, pour les suites complexes.

Définition 3.1. *Une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$. D est le domaine de définition de la suite u. Pour $n \in D$, la valeur de u en n, à savoir $u(n)$, est aussi notée par u_n. C'est un élément de $\mathbb{K}$. On désigne parfois u par $(u_n)_{n\in D}$. L'ensemble des suites définies sur une partie infinie D de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^D$.*
Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée suite réelle.
Une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ est appelée suite complexe.

Au lieu de considérer toutes les applications définies sur une partie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, on a choisi de se limiter à celles qui sont définies sur une partie infinie de $\mathbb{N}$ car, pour celles-ci seulement, on aura une notion de limite.

Considérons quelques exemples de suites réelles.
Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1/n$. Soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1/(n+1)$. Soit $D = [\![3;+\infty[\![$ et $w : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1/n$. Bien que ces trois suites se ressemblent, elles sont différentes.
Soit $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1$ si n est pair, et $x_n = -1$, si n est impair. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une formule pour x_n à savoir $x_n = (-1)^n$. Donc $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $y : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = n$, si $n \leq 7$, et $y_n = -1$, si $n > 7$. On remarque que y n'est pas une suite constante mais elle est constante égale à -1 à partir du rang 8, c'est-à-dire si l'on

oublie les 7 premiers termes.
Pour un entier naturel n, la formule
$$\frac{7n+5}{n(n-3)}$$
a un sens exactement quand $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 3\}$ et le résultat est un nombre réel. On peut donc définir une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ par $D = \mathbb{N} \setminus \{0; 3\}$ et, pour $n \in D$,
$$u_n = \frac{7n+5}{n(n-3)} .$$
On peut aussi considérer la suite $v : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $D' := [\![4; +\infty[\![$ et, pour $n \in D'$,
$$v_n = \frac{7n+5}{n(n-3)} .$$
C'est en fait la restriction de u à D'.
Pour $n \in \mathbb{N}$, la formule
$$\frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}$$
n'a de sens que si $n \notin \{4k; \, k \in \mathbb{N}\} := 4\mathbb{N}$. En posant $D = \mathbb{N} \setminus (4\mathbb{N})$, qui est bien une partie infinie de $\mathbb{N}$, la suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in D$,
$$u_n = \frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}$$
est bien définie.
Considérons maintenant des exemples de suites complexes.
Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = i^n$. En notant par exp l'exponentielle complexe, soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $v \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(in\pi/6)$. Soit $w : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = (1/n) + (i/n^2)$.

3.2 Suites récurrentes.

Une importante classe de suites est formée par les suites récurrentes que l'on va définir ici. On va voir deux types de suite récurrente : les suites récurrentes associées à une fonction et les séries. On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.2.1 Suites récurrentes associées à une fonction.

On se donne une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, où le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f est une partie non vide de $\mathbb{K}$. On veut construire de proche en proche une suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ en choisissant $u_0 \in \mathcal{D}$, en posant $u_1 = f(u_0)$, puis $u_2 = f(u_1)$, et ainsi de suite. Est-on sûr de définir ainsi une suite ? Est-on sûr d'en définir qu'une, une fois que u_0 a été choisi ?
Un premier problème est le suivant : il se pourrait que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \mathcal{D}$. Dans ce cas, nous serions dans l'incapacité de définir u_{n+1} puisque l'on ne peut appliquer f à u_n. C'est précisément ce qui se passe dans l'exemple suivant : on prend $f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $u_0 = 2$. On a bien $u_0 \in [1; +\infty[$ donc $u_1 = f(u_0) = f(2) = 1$. On a bien $u_1 \in [1; +\infty[$ donc $u_2 = f(u_1) = f(1) = 0$. Mais $u_2 \notin [1; +\infty[$.
On va voir que l'on peut éviter ce problème en imposant que l'image de la fonction f soit incluse dans son domaine de définition.
Le second problème est lié au fait que l'on doit définir u_n pour **tout** $n \in \mathbb{N}$. Pour un n explicite, par exemple $n = 10$, on peut le faire en calculant successivement les termes $u_1, \cdots, u_9$ puis définir u_{10} par

$f(u_9)$. Comme on doit faire cela pour **tout** $n \in \mathbb{N}$, on est confronté à une procédure infinie, sans savoir si elle est justifiée. Par bonheur, le théorème de récurrence va nous permettre de vérifier que l'on construit bien ainsi une suite (et une seule, une fois le premier terme choisi).

Proposition 3.2. *Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ une application dont le domaine de définition $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{K}$. On suppose que l'image par f de $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire que*

$$f(\mathcal{D}) \;:=\; \big\{f(x)\,;\; x \in \mathcal{D}\big\} \;\subset\; \mathcal{D}\,.$$

Pour tout $d \in \mathcal{D}$, il existe une unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant $u_0 = d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} \;=\; f(u_n)\,. \tag{3.1}$$

Remarque 3.3. *La preuve qui suit peut sembler compliquée. Cependant, il y a dans cette preuve une difficulté subtile. On renvoie au paragraphe 9.3 pour un éclaircissement à ce sujet.*

Preuve de la proposition 3.2 : Soit $d \in \mathcal{D}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante :
Il existe une unique application $v^{(n)} : [\![0; n]\!] \longrightarrow \mathcal{D}$ telle que $v^{(n)}(0) = d$ et, pour $p \in [\![0; n[\![$, $v^{(n)}(p+1) = f(v^{(n)}(p))$.
Soit $v : [\![0; 1]\!] \longrightarrow \mathcal{D}$ définie par $v(0) = d$ et $v(1) = f(d)$. v vérifie les contraintes imposées à $v^{(1)}$ dans $\mathcal{P}(1)$. Si $w : [\![0; 1]\!] \longrightarrow \mathcal{D}$ vérifie ces même contraintes alors $w(0) = d = v(0)$ et $w(1) = f(w(0)) = f(v(0)) = v(1)$. Donc $w = v$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $v^{(n+1)} : [\![0; n+1]\!] \longrightarrow \mathcal{D}$ l'application, dont la restriction à $[\![0; n]\!]$ est l'application $v^{(n)}$ fournie par l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ et dont la valeur en $n+1$ est $v^{(n+1)}(n+1) = f(v^{(n)}(n))$. On a $v^{(n+1)}(0) = v^{(n)}(0) = d$. Pour $p \in [\![0; n[\![$, on a $p \leq p+1 \leq n$ donc $v^{(n+1)}(p+1) = v^{(n)}(p+1) = f(v^{(n)}(p)) = f(v^{(n+1)}(p))$. De plus, $v^{(n+1)}(n+1) = f(v^{(n)}(n)) = f(v^{(n+1)}(n))$ car $v^{(n+1)}$ et $v^{(n)}$ coïncident sur $[\![0; n]\!]$. Donc $v^{(n+1)}$ vérifient les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $w : [\![0; n+1]\!] \longrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant ces mêmes contraintes. La restriction de w à $[\![0; n]\!]$ vérifie donc les contraintes imposées par $\mathcal{P}(n)$. D'après l'unicité de $v^{(n)}$, w coïncide avec $v^{(n)}$ sur $[\![0; n]\!]$ donc coïncide avec $v^{(n+1)}$ sur $[\![0; n]\!]$. De plus, $w(n+1) = f(w(n))$. D'après ce qui précède, $w(n+1) = f(w(n)) = f(v^{(n+1)}(n)) = v^{(n+1)}(n+1)$. Donc $w = v^{(n+1)}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $m \geq n$, la restriction à $[\![0; n]\!]$ de l'application $v^{(m)}$, fournie par $\mathcal{P}(m)$, vérifie les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n)$ donc $v^{(m)}_{|[\![0;n]\!]} = v^{(n)}$, l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$.
Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ définie par $u_0 = d$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v^{(n)}(n)$, où $v^{(n)}$ est l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = v^{(n+1)}(n+1) = f(v^{(n+1)}(n)) = f(v^{(n)}(n)) = f(u_n)$, puisque $v^{(n+1)}$ et $v^{(n)}$ coïncident sur $[\![0; n]\!]$. Donc u vérifie la relation de récurrence (3.1).
Il reste à vérifier l'unicité de la suite u. Soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant $v_0 = d$ et (3.1) avec u remplacée par v. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{Q}(n) = (u_n = v_n)$. Comme $u_0 = d = v_0$, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie, pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc $u_n = v_n \in \mathcal{D}$ donc $f(u_n) = f(v_n)$ et, par (3.1) (pour u et pour v), $u_{n+1} = f(u_n) = f(v_n) = v_{n+1}$. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $v = u$. $\square$.

Définition 3.4. *On se place dans le cadre de la proposition 3.2. Pour $d \in \mathcal{D}$, la suite u est appelée suite récurrente associée à f de premier terme d. La proposition* (3.1) *s'appelle la relation de récurrence satisfaite par u.*

On définit maintenant la classe des suites arithmético-géométriques, qui constituent des exemples de suites récurrentes associées à une fonction. Soit $(a; b) \in \mathbb{K}^2$ et $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par $f(x) = a \cdot x + b$. Comme l'image du domaine de f est incluse dans $\mathbb{K}$, le domaine de f, on peut appliquer la proposition 3.2 à cette fonction f. Pour $d \in \mathbb{K}$, il existe donc une unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $u_0 = d$ et (3.1). Cette dernière s'écrit aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} \;=\; a \cdot u_n \,+\, b\,. \tag{3.2}$$

Définition 3.5. *Soit $(a;b) \in \mathbb{K}^2$. Soit $d \in \mathbb{K}$. L'unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ de premier terme $u_0 = d$ vérifiant (3.2) est la suite arithmético-géométrique associée à $(a;b)$ et de premier terme d.*
Lorsque $b = 0$, on dit que u est la suite géométrique de raison a et de premier terme d.
Lorsque $a = 1$, on dit que u est la suite arithmétique de raison b et de premier terme d.

3.2.2 Sommes et séries.

Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. On souhaite effectuer la somme des termes de la suite u du premier terme au $n$ième, pour un $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $n = 0$, une telle somme est $s_0 = u_0$. Lorsque $n = 1$, une telle somme est $s_1 = u_0 + u_1$. Lorsque $n = 2$, une telle somme est $s_2 = u_0 + u_1 + u_2$. Pour n arbitraire, on a envie d'écrire

$$s_n \;=\; u_0 \,+\, u_1 \,+\, \cdots \,+\, u_{n-1} \,+\, u_n \,. \tag{3.3}$$

On rencontre de nouveau une procédure essentiellement infinie puisque n n'est pas limité. Grâce au théorème de récurrence, on va pouvoir donner un sens précis à toutes ces sommes.

Proposition 3.6. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D := [\![n_0; +\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Il existe une unique suite $s : D \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $s_{n_0} = u_{n_0}$ et*

$$\forall n \in D\,, \quad s_{n+1} \;=\; s_n \,+\, u_{n+1}\,. \tag{3.4}$$

Remarque 3.7. *Ici aussi, on fait face à la difficulté subtile mentionnée dans la remarque 3.3.*

Preuve de la proposition 3.6 : On suit la démarche de la preuve de la proposition 3.2. On montre par récurrence la proposition $\mathcal{P}(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, donnée par :
Il existe une unique application $v^{(n)} : [\![n_0; n_0+n]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $v^{(n)}(0) = u_{n_0}$ et, pour $p \in [\![n_0; n_0+n-1]\!]$, $v^{(n)}(p+1) = v^{(n)}(p) + u_{p+1}$.
Soit $v : [\![n_0; n_0+1]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par $v(n_0) = u_{n_0}$ et $v(n_0+1) = u_{n_0} + u_{n_0+1}$. v vérifie les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(1)$. Si $w : [\![n_0; n_0+1]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifie ces mêmes contraintes alors $w(n_0) = u_{n_0} = v(n_0)$ et $w(n_0+1) = w(n_0) + u_{n_0+1} = u_{n_0} + u_{n_0+1} = v(n_0+1)$. Donc $w = v$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $v^{(n+1)} : [\![n_0; n_0+n+1]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$ l'application, dont la restriction à $[\![n_0; n_0+n]\!]$ est $v^{(n)}$ et dont la valeur en n_0+n+1 est $v^{(n+1)}(n_0+n+1) = v^{(n)}(n_0+n) + u_{n+1}$. On a $v^{(n+1)}(n_0) = v^{(n)}(n_0) = u_{n_0}$. Pour $p \in [\![n_0; n_0+n-1]\!]$, on a $p \leq p+1 \leq n_0+n$ donc $v^{(n+1)}(p+1) = v^{(n)}(p+1) = v^{(n)}(p) + u_{p+1} = v^{(n+1)}(p) + u_{p+1}$. Enfin, $v^{(n+1)}(n_0+n+1) = v^{(n)}(n_0+n) + u_{n+1} = v^{(n+1)}(n_0+n) + u_{n+1}$. $v^{(n+1)}$ vérifie donc les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n+1)$. Si w vérifie ces mêmes contraintes alors la restriction de w à $[\![n_0; n_0+n]\!]$ vérifie celles imposées dans $\mathcal{P}(n)$ donc elle coïncide avec $v^{(n)}$ et aussi avec la restriction de $v^{(n+1)}$ à $[\![n_0; n_0+n]\!]$. De plus, $w(n_0+n+1) = w(n_0+n) + u_{n+1} = v^{(n)}(n_0+n) + u_{n+1} = v^{(n+1)}(n_0+n+1)$. Donc $w = v^{(n+1)}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $m \geq n$, la restriction à $[\![n_0; n_0+n]\!]$ de l'application $v^{(m)}$, fournie par $\mathcal{P}(m)$, vérifie les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n)$ donc cette restriction est en fait $v^{(n)}$, l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$.
On définit alors la suite $s : D \longrightarrow \mathbb{K}$ par $s_n = v^{(n)}(n)$, où $v^{(n)}$ est l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = v^{(n+1)}(n+1) = v^{(n+1)}(n) + u_{n+1} = v^{(n)}(n) + u_{n+1} = s_n + u_{n+1}$, puisque $v^{(n+1)}$ et $v^{(n)}$ coïncident sur $[\![n_0; n_0+n]\!]$. Donc s vérifie la relation de récurrence (3.4).
Il reste à vérifier l'unicité de la suite s. Soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant $v_{n_0} = u_{n_0}$ et (3.4) avec s remplacée par v. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{Q}(n) = (s_n = v_n)$. Comme $s_{n_0} = u_{n_0} = v_{n_0}$, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie, pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc $s_n = v_n \in \mathcal{D}$ donc $s_n + u_{n+1} = v_n + u_{n+1}$ et, par (3.4) (pour s et pour v), $s_{n+1} = s_n + u_{n+1} = v_n + u_{n+1} = v_{n+1}$. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $v = s$. $\square$.

Définition 3.8. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. La suite s construite dans la proposition 3.6 est appelée suite des sommes partielles de la suite u. On dit aussi que c'est la série de* *terme général u_n. On définit plusieurs notations pour les termes de la suite s, qui sont des sommes finies. Pour $n \in D$, on pose :*

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \;:=\; \sum_{k\in[\![n_0;n]\!]} u_k \;:=\; \sum_{n_0\le k\le n} u_k \;:=\; s_n\,. \tag{3.5}$$

Le signe $\sum$ se dit "somme" ou bien "sigma" (c'est en fait la majuscule de la lettre grecque "sigma"). Le paramètre k dans ces notations est appelé indice de la somme. Lorsque $n < n_0$, on pose par **convention**

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \;:=\; 0\,.$$

Attention, dans la dernière notation de (3.5), il est sous-entendu que l'indice k de la somme est un entier. On peut changer le symbole désignant l'indice de ces sommes sans changer les sommes en question. Il n'a pas d'existence extérieure, il ne sert qu'à décrire la somme. Il joue un rôle similaire à l'indice utilisé dans une boucle en informatique. En particulier, il ne peut pas apparaître en dehors de la somme.

Alors que les séries seront étudiées de manière systématique en L2, on se limitera, dans ce cours, à quelques exemples. En revanche, on se servira souvent des symboles introduits dans (3.5) qui permettent de décrire des sommes finies.

Voyons maintenant quelques propriétés de ces sommes. Prenons une suite $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{K}$. Considérons le troisième terme s_3 de la suite s des sommes partielles de u. Par définition, $s_3 = s_2 + u_3$, $s_2 = s_1 + u_2$ et $s_1 = u_1$. Donc $s_3 = u_1 + u_2 + u_3$. On peut aussi écrire $s_3 = u_3 + u_2 + u_1$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \sum_{\ell=0}^{2} u_{3-\ell}\,.$$

Si $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par $v_p = u_{p+1}$ alors $s_3 = u_1 + u_2 + u_3$ est aussi $v_0 + v_1 + v_2$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \sum_{\ell=0}^{2} v_\ell \;=\; \sum_{\ell=0}^{2} u_{\ell+1}\,.$$

On peut aussi écrire $s_3 = (u_1 + u_2) + u_3$ et $s_3 = u_1 + (u_2 + u_3)$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \left(\sum_{k=1}^{2} u_k\right) + \left(\sum_{k=3}^{3} u_k\right) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{1} u_k\right) + \left(\sum_{k=2}^{3} u_k\right)\,.$$

Soit $(w_1; w_2; w_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $u_1 = 2w_1$, $u_2 = 2w_2$ et $u_3 = 2w_3$. On peut écrire $s_3 = u_1 + (2w_2 + 2w_3) = 2w_1 + 2(w_2 + w_3) = 2(w_1 + (w_2 + w_3)) = 2(w_1 + w_2 + w_3)$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \sum_{k=1}^{3} 2w_k \;=\; 2\cdot\sum_{k=1}^{3} w_k\,.$$

Si $x : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{K}$ est une autre suite, on peut considérer la somme $(u_1 + x_1) + (u_2 + x_2) + (u_3 + x_3)$ et l'écrire $(u_1 + u_2 + u_3) + (x_1 + x_2 + x_3)$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} (u_k + x_k) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{3} u_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{3} x_k\right)\,.$$

On sent que ces propriétés sont générales, elles ne dépendent pas du nombre de termes dans la somme. On s'attend donc à ce qu'elles soient vraies quelque soit le nombre de termes. Comme ce dernier n'est pas majoré, on va avoir besoin du théorème de récurrence pour les établir dans le cas général. C'est ce que l'on fait dans la proposition suivante.

Proposition 3.9. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $u : [\![n_0;+\infty[\![\longrightarrow \mathbb{K}$ et $v : [\![n_0;+\infty[\![\longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour $n \geq n_0$,*

$$\forall q \in [\![n_0;n]\!]\,, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \;=\; \sum_{k=n_0}^{q} u_k \;+\; \sum_{k=q+1}^{n} u_k\,, \tag{3.6}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}\,, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \;=\; \sum_{\ell=n_0+m}^{n+m} u_{\ell-m}\,, \tag{3.7}$$

$$\forall m \in [\![0;n_0]\!]\,, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \;=\; \sum_{\ell=n_0-m}^{n-m} u_{\ell+m}\,, \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \;=\; \sum_{\ell=0}^{n-n_0} u_{n-\ell} \tag{3.9}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \;=\; \sum_{p=n_0}^{n} u_{n+n_0-p}\,, \tag{3.10}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} \lambda u_k \;=\; \lambda \cdot \sum_{k=n_0}^{n} u_k\,, \tag{3.11}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} (u_k \,+\, v_k) \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + \left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right). \tag{3.12}$$

$$\overline{\sum_{k=n_0}^{n} u_k} \;=\; \sum_{k=n_0}^{n} \overline{u_k}\,, \tag{3.13}$$

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| \;\leq\; \sum_{k=n_0}^{n} |u_k|\,. \tag{3.14}$$

Si u est constante égale à $c \in \mathbb{K}$ alors, pour tout $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \;=\; c \cdot (n \,-\, n_0 \,+\, 1)\,, \tag{3.15}$$

c'est-à-dire c fois le nombre d'éléments dans $[\![n_0;n]\!]$.

Preuve :

1. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{P}(n) = ((3.6)$ est vraie). Pour $n = n_0$, on a (3.6) est vraie d'après la convention adoptée dans la définition 3.8. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. On a, par la définition 3.8,
$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) \;+\; u_{n+1}\,,$$
ce qui est précisément la formule dans (3.6) pour n remplacé par $n+1$ et $q = n+1$. Maintenant, soit $q \in [\![n_0;n]\!]$. On a, par la définition 3.8 et par l'hypothèse de récurrence,
$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{q} u_k\right) + \left(\sum_{k=q+1}^{n} u_k\right) + u_{n+1} \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{q} u_k\right) + \left(\sum_{k=q+1}^{n+1} u_k\right).$$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.6).

2. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{Q}(n) = ((3.7)$ est vraie). Pour $n = n_0$, on a

$$\sum_{k=n_0}^{n_0} u_k \;=\; u_{n_0} \;=\; u_{(n_0+m)-m} \;=\; \sum_{\ell=n_0+m}^{n_0+m} u_{\ell-m}$$

donc $\mathcal{Q}(n_0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a, par la définition 3.8 et par l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) \;+\; u_{n+1} \;=\; \left(\sum_{\ell=n_0+m}^{n+m} u_{\ell-m}\right) \;+\; u_{(n+1+m)-m} \;=\; \sum_{\ell=n_0+m}^{(n+1)+m} u_{\ell-m} \,.$$

Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ soit vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.7).
Soit $m \in [\![n_0; n]\!]$. On applique (3.7) avec n_0 remplacé par $n_0 - m$, u remplacée par $w = (u_{\ell+m})_{\ell \in [\![n_0-m;+\infty[\![}$, n remplacé par $n - m$:

$$\sum_{\ell=n_0-m}^{n-m} u_{\ell+m} \;=\; \sum_{\ell=n_0-m}^{n-m} w_\ell \;=\; \sum_{\ell'=(n_0-m)+m}^{(n-m)+m} w_{\ell'-m} \;=\; \sum_{\ell'=(n_0-m)+m}^{(n-m)+m} u_{(\ell'-m)+m} \;=\; \sum_{k=n_0}^{n} u_k \,,$$

ce qui donne (3.8).

3. Pour $n \geq n_0$, soit

$$\mathcal{R}(n) \;=\; \left(\forall x \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}\,, \quad \sum_{k=n_0}^{n} x_k \;=\; \sum_{\ell=0}^{n-n_0} x_{n-\ell}\right) \,.$$

$\mathcal{R}(n_0)$ est vraie car, pour tout $x \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}$ et $n = n_0$, $x_{n_0} = x_{n-0}$. Supposons que $\mathcal{R}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Soit $x \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}$. Pour $p \geq n_0$, soit $w_p = x_{p+1}$. On a $w \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}$. On a, par (3.6) avec n remplacé par $n+1$, u remplacé par x et $q = n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} x_k \;=\; \left(\sum_{k=n_0+1}^{n+1} x_k\right) \;+\; x_{n_0} \;=\; \left(\sum_{k=n_0+1}^{n+1} w_{k-1}\right) \;+\; x_{n_0} \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} w_k\right) \;+\; x_{n_0} \,,$$

d'après (3.8) pour u remplacée par w et $m = 1$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à w, on a donc

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} x_k \;=\; \left(\sum_{\ell=0}^{n-n_0} w_{n-\ell}\right) \;+\; x_{n_0} \;=\; \left(\sum_{\ell=0}^{n-n_0} x_{n+1-\ell}\right) \;+\; x_{n+1-(n+1-n_0)} \;=\; \sum_{\ell=0}^{n+1-n_0} x_{n+1-\ell} \,.$$

Donc $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7), $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.9) puisque $u \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}$.

4. Pour $p \in [\![n_0; n]\!]$, soit $y_p = u_{n+n_0-p}$ et, pour $p > n$, $y_p = 0$. On a donc, par (3.9) appliquée à y,

$$\sum_{p=n_0}^{n} u_{n+n_0-p} \;=\; \sum_{p=n_0}^{n} y_p \;=\; \sum_{\ell=0}^{n-n_0} y_{n-\ell} \;=\; \sum_{\ell=0}^{n-n_0} u_{\ell+n_0} \;=\; \sum_{k=n_0}^{n} u_k \,,$$

par (3.8) avec $m = n_0$. On a montré (3.10).

5. Pour $n \geq n_0$, soit

$$\mathcal{S}(n) \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} (\lambda u_k \;+\; v_k) \;=\; \lambda \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) \;+\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right)\right) \,.$$

Comme $(\lambda u_{n_0} + v_{n_0}) = \lambda(u_{n_0}) + (v_{n_0})$, $\mathcal{S}(n_0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{S}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. On a, par la définition 3.8 et par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n+1} (\lambda u_k + v_k) &= \left(\sum_{k=n_0}^{n} (\lambda u_k + v_k)\right) + (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) \\ &= \lambda \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + \left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right) + \lambda u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= \lambda \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k\right) + \left(\sum_{k=n_0}^{n+1} v_k\right),\end{aligned}$$

par la définition 3.8. Donc $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7), $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. D'après $\mathcal{S}(n)$ avec $v = 0$, on obtient (3.11). D'après $\mathcal{S}(n)$ avec $\lambda = 1$, on obtient (3.12).

6. On a, en utilisant $\mathcal{S}(n)$ avec $\lambda = i$ et, pour tout $k \in [\![n_0; n]\!]$, u_k remplacé par $\Im(u_k)$ et v_k remplacé par $\Re(u_k)$,

$$\begin{aligned}\overline{\sum_{k=n_0}^{n} u_k} &= \overline{\sum_{k=n_0}^{n} \big(\Re(u_k) + i \cdot \Im(u_k)\big)} = \overline{\left(\sum_{k=n_0}^{n} \Re(u_k)\right) + i \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} \Im(u_k)\right)} \\ &= \left(\sum_{k=n_0}^{n} \Re(u_k)\right) - i \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} \Im(u_k)\right) = \sum_{k=n_0}^{n} \big(\Re(u_k) - i \cdot \Im(u_k)\big) \\ &= \sum_{k=n_0}^{n} \overline{u_k},\end{aligned}$$

en utilisant encore $\mathcal{S}(n)$ mais avec $\lambda = -i$. On a montré (3.13).

7. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{T}(n) = ((3.14)$ est vraie). $\mathcal{T}(n_0)$ est vraie car

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n_0} u_k\right| = |u_{n_0}| \leq |u_{n_0}| = \sum_{k=n_0}^{n_0} |u_k|.$$

Supposons que $\mathcal{T}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Par la définition 3.8, l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k\right| = \left|\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + u_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| + |u_{n+1}| \leq \left(\sum_{k=n_0}^{n} |u_k|\right) + |u_{n+1}| = \sum_{k=n_0}^{n+1} |u_k|.$$

Donc $\mathcal{T}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7), $\mathcal{T}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.14).

8. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{U}(n) = ((3.15)$ est vraie). $\mathcal{U}(n_0)$ est vraie car $u_{n_0} = c(n_0 - n_0 + 1)$. Supposons que $\mathcal{U}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Par la définition 3.8 et par hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = c \cdot (n - n_0 + 1) + c = c \cdot (n + 1 - n_0 + 1).$$

Donc $\mathcal{U}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7), $\mathcal{U}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.15). □

En application, on peut montrer le résultat suivant sur les suites arithmético-géométrique.

Proposition 3.10. *Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$. Soit $d \in \mathbb{C}$. Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ la suite arithmético-géométrique de premier terme d et associée à $(a;b)$ (cf. Definition 3.5). On a*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n \;=\; d \cdot a^n \,+\, b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k\,. \tag{3.16}$$

Lorsque $b = 0$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d \cdot a^n$.
Lorsque $a = 1$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d + nb$.
De plus, si $a \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k \;=\; \frac{1 \,-\, a^n}{1 \,-\, a} \;=\; \frac{a^n \,-\, 1}{a \,-\, 1}\,. \tag{3.17}$$

Preuve : À faire en td. □

3.2.3 Produits, puissances, factorielles.

Dans le paragraphe 3.2.2, on a donné des propriétés sur les sommes finies dans $\mathbb{K}$. De manière similaire, on peut traiter les produits finis dans $\mathbb{K}$. On pourrait obtenir un pendant pour chaque propriété sur les sommes. On se contente ici de donner une notation pour les produits finis, de justifier proprement la suite des puissances d'un nombre et d'introduire la suite des factorielles.

Proposition 3.11. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0;+\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Il existe une unique suite $\pi : D \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $\pi_{n_0} = u_{n_0}$ et*

$$\forall n \in D\,, \quad \pi_{n+1} \;=\; \pi_n \,\cdot\, u_{n+1}\,. \tag{3.18}$$

Preuve : Il suffit de remplacer la somme $+$ de $\mathbb{K}$ par le produit $\cdot$ de $\mathbb{K}$ dans la preuve de la proposition 3.6 pour obtenir une preuve de la proposition 3.11. □

Comme au paragraphe 3.2.2, on pourrait donner un nom à cette suite π. On se contente de définir une notation pour les produits finis :

Définition 3.12. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0;+\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. On considère la suite π construite dans la proposition 3.11. On définit plusieurs notations pour les termes de la suite π, qui sont des produits : pour $n \in D$, on pose :*

$$\prod_{k=n_0}^{n} u_k \;:=\; \prod_{k\in[\![n_0;n]\!]} u_k \;:=\; \prod_{n_0\le k\le n} u_k \;:=\; \pi_n\,. \tag{3.19}$$

Le signe $\prod$ se dit "produit" ou bien "pi" (c'est en fait la majuscule de la lettre grecque "pi"). Le paramètre k dans ces notations est appelé indice du produit. Lorsque $n < n_0$, on pose par **convention**

$$\prod_{k=n_0}^{n} u_k \;:=\; 1\,.$$

Comme au paragraphe 3.2.2, on peut montrer des propriétés de ces produits finis qui sont similaires à celle des sommes finies que l'on a vues dans la proposition 3.9. On se contente de donner la définition des notions de "puissance" et de "factorielle".

Définition 3.13. *Puissances et factorielles.*
Soit $a \in \mathbb{K}$ et $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ la suite constante égale à a. On considère l'unique suite $\pi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée

par la proposition 3.11 pour cette suite u. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a^n := \pi_n$ et on prononce "a puissance n". On a donc, pour $n \geq 1$,

$$a^n = \prod_{k=1}^{n} a \,.$$

Par **convention**, *on pose $a^0 = 1$.*
Soit $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ la suite réelle donnée par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n$. On considère l'unique suite $\pi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par la proposition 3.11 avec u remplacée par v. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n! := \pi_n$ et on prononce "factorielle n". On a donc, pour $n \geq 1$,

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \,.$$

Par **convention**, *on pose $0! = 1$.*

On remarque, par récurrence, que la suite $(1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et que la suite $(0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 à partir du rang 1. Si $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors on vérifie par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_{2p} = 1$ et $x_{2p+1} = -1$. On peut aussi montrer par récurrence que la suite réelle $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On termine ce paragraphe en donnant deux propriétés utiles des suites géométriques.

Proposition 3.14. *Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$. Pour $(m;n) \in \mathbb{N}^2$, $(a^n)\cdot(a^m) = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$ et $(ab)^m = a^m b^m$.*

Preuve : Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(m) = (\forall\, n \in \mathbb{N}, (a^n)\cdot(a^m) = a^{n+m})$, $\mathcal{Q}(m) = (\forall\, n \in \mathbb{N}, (a^n)^m = a^{nm})$ et $\mathcal{R}(m) = ((ab)^m = a^m b^m)$.
Par la première convention dans la définition 3.13, $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{Q}(0)$ et $\mathcal{R}(0)$ sont vraies.
Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie pour un $m \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la définition 3.13, on a $a^{m+1} = a^m \cdot a$ donc $(a^n)\cdot(a^{m+1}) = (a^n)\cdot(a^m)\cdot a$ et, par l'hypothèse de récurrence, $(a^n)\cdot(a^{m+1}) = a^{n+m}\cdot a$. Donc, en utilisant encore la définition 3.13, $(a^n)\cdot(a^{m+1}) = a^{n+m+1}$. Donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{Q}(m)$ vraie pour un $m \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par la définition 3.13, $(a^n)^{m+1} = (a^n)^m \cdot a^n$ et, par l'hypothèse de récurrence, $(a^n)^{m+1} = a^{nm}\cdot a^n$. Donc, par $\mathcal{P}(n)$, $(a^n)^{m+1} = a^{nm+n} = a^{n(m+1)}$. Donc $\mathcal{Q}(m+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{R}(m)$ vraie pour un $m \in \mathbb{N}$. Par la définition 3.13, $(ab)^{m+1} = (ab)^m \cdot (ab)$ et, par l'hypothèse de récurrence, $(ab)^{m+1} = a^m \cdot b^m \cdot a \cdot b = a^{m+1}\cdot b^{m+1}$, par la définition 3.13. Donc $\mathcal{R}(m+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{R}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$. □

3.3 Propriétés des suites.

Dans cette partie, on donne des propriétés générales des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Des propriétés spécifiques aux suites réelles seront aussi mentionnées. On introduit enfin la notion de sous-suite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

3.3.1 Propriétés générales.

Une première propriété importante des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) réside dans le fait que l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour des lois de compositions appropriées que l'on donne maintenant.

Définition 3.15. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*
On définit une nouvelle suite $w : D \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $n \in D$, $w_n = u_n + v_n$. La suite w est la somme des suites u et v et est notée $w = u + v$.

On définit une nouvelle suite $x : D \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $n \in D$, $x_n = \lambda \cdot u_n$. La suite x est le produit de la suite u par le scalaire λ et est notée λu ou $\lambda \cdot u$.
Une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite constante (sur D) s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $n \in D$, $u_n = c$.
La suite nulle sur D est la suite constante égale à 0 sur D.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite constante (sur D) à partir du rang N s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n = c$.
Une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, pour laquelle il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit constante (sur D) à partir du rang N, est dite stationnaire.

Par exemple $2((1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}) = (2/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. La somme des suites $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, données par $u_n = \ln(n)$ et $v_n = \ln(1/n)$, est la suite nulle sur $\mathbb{N}^*$ puisque, pour tout $n > 0$,

$$u_n + v_n = \ln(n) + \ln(1/n) = \ln(n) - \ln(n) = 0 .$$

Attention : pour des raisons de clarté, on note de la même manière l'addition dans $\mathbb{K}$ et celle dans $\mathbb{K}^D$, alors qu'elles sont différentes.

Proposition 3.16. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}^D$ des suites définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire définies dans la définition 3.15, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Preuve : Grâce aux propriétés d'associativité et de commutativité de la loi $+$ dans $\mathbb{K}$, on en déduit ces même propriétés pour la loi $+$ de $\mathbb{K}^D$. On voit que la suite nulle sur D est l'élement neutre de la loi $+$ de $\mathbb{K}^D$. Toute suite $u \in \mathbb{K}^D$ admet comme suite opposée la suite $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par, pour $n \in D$, $v_n = -u_n$. Comme on a, pour tout $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(a; b) \in \mathbb{K}^2$,

$$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a) , (\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a , \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b , 1 \cdot a = a ,$$

on obtient, pour tout $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(u; v) \in (\mathbb{K}^D)^2$,

$$(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u) , (\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u , \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v , 1 \cdot u = u .$$

On a montré que $\mathbb{K}^D$ muni des lois de la définition 3.15 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Pour $m \in D$, on considère la suite $e^{(m)} : D \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $e^{(m)}_n = 1$ si $n = m$ et $e^{(m)}_n = 0$ si $n \neq m$.

Proposition 3.17. *La famille $(e^{(m)})_{m\in D}$ est une famille libre du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^D$. En particulier, la dimension de l'espace est infinie.*

Preuve : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $(i_1; \cdots; i_p) \in D^p$ avec $i_1 < \cdots < i_p$ et $(\lambda_1; \cdots; \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot e^{(i_k)} = 0$$

dans $\mathbb{K}^D$. Donc, pour $j \in [\![1; p]\!]$, on a, en prenant la valeur en i_j de la suite nulle,

$$0 = \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot e^{(i_k)} \right)_{i_j} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot e^{(i_k)}_{i_j} = \lambda_j .$$

On a montré que la famille est libre. □

Remarque 3.18. *Les polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ (vus dans le cours d'Algèbre 2) forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^D$ (pour les lois de la définition 3.15).*

On introduit aussi le produit de deux suites.

Définition 3.19. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$.*
Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Le produit de u par v est la suite $w : D \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par, pour tout $n \in D$, $w_n = u_n \cdot v_n$. On note w par uv ou $u \cdot v$.

On remarque que, si $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $c \in \mathbb{K}$, cu peut être vu comme le produit de u par le scalaire c ou bien comme le produit de la suite u avec la suite constante égale à c.

On définit aussi le module ou la valeur absolue d'une suite.

Définition 3.20. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On note par $|u|$ la suite réelle $(|u_n|)_{n\in D}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $|u|$ est la suite "module de u" et, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $|u|$ est la suite "valeur absolue de u".*

Pour terminer ce paragraphe, donnons la définition de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une suite complexe. On rappelle que, pour $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z et $\Im(z)$ sa partie imaginaire.

Définition 3.21. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Les suites réelles $\Re(u) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Im(u) : D \longrightarrow \mathbb{R}$, définies par, pour $n \in D$, $(\Re(u))_n = \Re(u_n)$ et $(\Im(u))_n = \Im(u_n)$, sont appelées respectivement partie réelle de u et partie imaginaire de u.*

3.3.2 Propriétés propres aux suites réelles.

Dans ce paragraphe, on se concentre sur les suites réelles (i.e. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et on donne des propriétés reliées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.22. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle.*
On dit que u est croissante si

$$\forall (n;m) \in D^2 , \Big((n \leq m) \implies (u_n \leq u_m) \Big) .$$

On dit que u est strictement croissante si

$$\forall (n;m) \in D^2 , \Big((n < m) \implies (u_n < u_m) \Big) .$$

On dit que u est décroissante si

$$\forall (n;m) \in D^2 , \Big((n \leq m) \implies (u_n \geq u_m) \Big) .$$

On dit que u est strictement décroissante si

$$\forall (n;m) \in D^2 , \Big((n < m) \implies (u_n > u_m) \Big) .$$

On dit que u est monotone si elle est croissante ou bien si elle est décroissante.
On dit que u est strictement monotone si elle est strictement croissante ou bien si elle est strictement décroissante.
Soit $N \in \mathbb{N}$.
On dit que u est croissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N; +\infty[\![$ est croissante.
On dit que u est strictement croissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N; +\infty[\![$ est strictement croissante.
On dit que u est décroissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N; +\infty[\![$ est décroissante.
On dit que u est strictement décroissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N; +\infty[\![$ est strictement décroissante.

On dit que u est monotone à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N; +\infty[\![$ est monotone.
On dit que u est strictement monotone à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N; +\infty[\![$ est strictement monotone.
On dit que u est croissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit croissante à partir du rang N.
On dit que u est strictement croissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit strictement croissante à partir du rang N.
On dit que u est décroissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit décroissante à partir du rang N.
On dit que u est strictement décroissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit strictement décroissante à partir du rang N.
On dit que u est monotone à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit monotone à partir du rang N.
On dit que u est strictement monotone à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit strictement monotone à partir du rang N.

Voyons quelques exemples. La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle est aussi strictement croissante. La suite constante égale à 1 est croissante, mais aussi décroissante. Elle n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et aussi strictement décroissante.

On peut vérifier que la suite $(n^2 - 4n + 4)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 2022. Elle l'est aussi à partir du rang 2. Elle ne l'est pas à partir du rang 1. Cette suite est donc croissante à partir d'un certain rang. En fait, on peut vérifier qu'elle est strictement croissante à partir du rang 2. Elle est donc strictement croissante à partir d'un certain rang.

Contrairement aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dispose, pour repérer les suites monotones, de la proposition suivante.

Proposition 3.23. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $u : [\![n_0; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned}
\big(u \text{ est croissante}\big) &\iff \big(\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![\,, \quad u_{n+1} \geq u_n\big)\,. \\
\big(u \text{ est strictement croissante}\big) &\iff \big(\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![\,, \quad u_{n+1} > u_n\big)\,. \\
\big(u \text{ est décroissante}\big) &\iff \big(\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![\,, \quad u_{n+1} \leq u_n\big)\,. \\
\big(u \text{ est strictement décroissante}\big) &\iff \big(\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![\,, \quad u_{n+1} < u_n\big)\,.
\end{aligned}$$

Preuve : On montre seulement la première équivalence. Les autres peuvent être démontrées de manière similaire.
$\Longrightarrow$) : On suppose que u est croissante. Soit $n \geq n_0$. Comme $n+1 \geq n$, on a, d'après la croissance de u, $u_{n+1} \geq u_n$.
$\Longleftarrow$) : On suppose vrai le membre de droite de l'équivalence de l'énoncé. On montre que u est croissante. Pour ce faire, on montre par récurrence la proposition $\mathcal{P}(q)$ donnée, pour $q \in \mathbb{N}$, par

$$\mathcal{P}(q) \;=\; \big(\forall p \in [\![n_0; +\infty[\![\,, \quad u_{p+q} \geq u_p\big)\,.$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie, car, pour tout $p \geq n_0$, on a $u_{p+0} = u_p \geq u_p$. Supposons que $\mathcal{P}(q)$ soit vraie pour un $q \in \mathbb{N}$. Soit $p \geq n_0$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à $p+1$, on a $u_{p+q+1} = u_{(p+1)+q} \geq u_{p+1}$. D'après l'hypothèse, $u_{p+1} \geq u_p$. Donc $u_{p+q+1} \geq u_p$. Ceci étant vrai pour tout $p \geq n_0$, $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.
Soit $(m; n) \in [\![n_0; +\infty[\![^2$ avec $m \geq n$. Comme $\mathcal{P}(m-n)$ est vraie, on a $u_m = u_{n+(m-n)} \geq u_n$. On a montré que u est croissante. □

Définition 3.24. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. Soit $a \in \mathbb{R}$.*
On dit que u est majorée par a si a majore l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire si, pour tout

$n \in D$, $u_n \leq a$.
On dit que u est majorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que u soit majorée par b.
On dit que u est minorée par a si a minore l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire si, pour tout $n \in D$, $u_n \geq a$.
On dit que u est minorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que u soit minorée par b.
On dit que u est bornée si u est majorée et u est minorée.
Lorsqu'une suite est minorée par 0, on dit qu'elle est positive.
Lorsqu'une suite est majorée par 0, on dit qu'elle est négative.

La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0, donc positive. On peut vérifier qu'elle n'est pas majorée. La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi minorée par 0. Elle est majorée par 2022. Elle est aussi majorée par 1.

On peut bien sûr définir le fait qu'une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ soit majorée à partir d'un rang $N \in \mathbb{N}$ comme suit. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. On dit qu'elle est majorée à partir du rang N s'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \leq a$. Mais cette propriété n'est pas très utile car, dans ce cas, la suite est majorée, tout court.
Vérifions ce point. Prenons donc une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est majorée à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$. Il existe donc un $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \leq a$. Par la proposition 1.13, l'ensemble $[\![0; N]\!] \cap D$ est fini. Donc son image par u est aussi finie. Par la proposition 1.12, elle admet un maximum m. Soit $b = \max(a; m)$. Soit $n \in D$. Si $n \leq N$, $n \in D \cap [\![0; N]\!]$, donc $u_n \leq m \leq b$. Si $n > N$ alors, par l'hypothèse, $u_n \leq a \leq b$. Donc b majore u et u est majorée.

Pour terminer, on donne une caractérisation très utile de la bornitude avec la valeur absolue.

Proposition 3.25. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. On a l'équivalence :*

$$\Big(\big(u \text{ est bornée}\big) \iff \big(\exists m \in \mathbb{R}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad |u_n| \leq m\big)\Big)\,.$$

Preuve : On montre successivement les deux implications.
$\Longrightarrow$) : On suppose u bornée. Il existe donc $(m_-; m_+) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in D$, $m_- \leq u_n \leq m_+$. Soit $m = \max(|m_-|; |m_+|)$. On a $m \geq |m_-| \geq -m_-$. On a aussi $m \geq |m_+| \geq m_+$. Soit $n \in D$. On a $u_n \leq m_+ \leq m$ et $-u_n \leq -m_- \leq m$, donc $|u_n| = \max(u_n; -u_n) \leq m$.
$\Longleftarrow$) : On suppose vrai le membre de droite de l'équivalence de l'énoncé. Il existe donc un $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in D$, $|u_n| \leq m$ soit $u_n \in I(0; m]$. Par la proposition 2.7 avec $x_0 = 0$ et $r = m$, on a donc, pour tout $n \in D$, $-m \leq u_n \leq m$. Donc u est majorée par m et minorée par $-m$. Elle est donc bornée. $\square$

3.3.3 Sous-suites.

On revient dans le cadre général des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 3.26. *On appelle extractrice une suite strictement croissante définie sur une partie infinie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application strictement croissante $\varphi : D' \longrightarrow \mathbb{N}$, où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$.*

Les suites $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1(n) = 2n$ et $\varphi_2(n) = 2n + 1$, sont des extractrices. La suite $\varphi_3 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ donnée par $\varphi_3(n) = n^2 - 4n + 4$ n'est pas une extractrice car $\varphi_3(0) = 4 > 1 = \varphi_3(1)$. Mais on peut vérifier que sa restriction à $[\![2; +\infty[\![$ en est une. La suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bien strictement croissante mais elle n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$. Ce n'est donc pas une extractrice. Cependant, si l'on pose $D' = \{p^2; p \in \mathbb{N}\}$, D' est bien une partie infinie de $\mathbb{N}$ et la suite $\varphi_4 : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in D'$, $\varphi_4(n) = \sqrt{n}$ est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$ et est strictement croissante. C'est donc une extractrice. Enfin, on peut vérifier que $\varphi_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_5(n) = 2^n$ est aussi une extractrice.

Définition 3.27. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Une sous-suite de u est la composée de u par une extractrice, c'est-à-dire une suite $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$, où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$, telle qu'il existe une extratrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ telle que $v = u \circ \varphi$.*
Une sous-suite de u est aussi appelée suite extraite de u.

Pour $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-suites de u puisqu'elles sont $u \circ \varphi_1$ et $u\circ\varphi_2$ respectivement, pour les extractrices φ_1 et φ_2 vues plus haut. Si $x = (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $y = (1/(2n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ alors y est une sous-suite de x car $y = x \circ \psi$, où $\psi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$, définie par $\psi(n) = 2n$, est strictement croissante. Soit $D = \mathbb{N} \setminus (4\mathbb{N})$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in D$,

$$u_n \;=\; \frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}\;.$$

Soit $v = ((-1)^p)_{p\in\mathbb{N}}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $2(2p+1) \notin 4\mathbb{N}$ car $2p+1 \notin 2\mathbb{N}$, et

$$u_{2(2p+1)} \;=\; \frac{1}{\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)} \;=\; \frac{1}{\sin\left(p\pi \,+\, \frac{\pi}{2}\right)} \;=\; \frac{1}{(-1)^p} \;=\; (-1)^p\;.$$

On voit que v est une sous-suite de u car $v = u \circ \varphi$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$, donnée par $\varphi(p) = 2(2p+1)$, est strictement croissante.

Voyons maintenant une façon plus intuitive de construire des sous-suites d'une suite donnée. Prenons une suite réelle $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Par exemple, on veut contruire une suite constituée de termes de u, dans l'ordre donné par les indices de u, mais sans les deux premiers termes de u. On peut prendre $v^{(0)} : [\![3; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ et $v^{(0)}_n = u_n$, pour $n \geq 3$. On peut aussi prendre $v^{(1)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $v^{(1)}_n = u_{n+3}$. Peut-on construire une suite constituée de termes de u, dans l'ordre donné par les indices de u, sans une infinité des termes de u ? Oui, on peut par exemple retirer tous les termes d'incide pair. On peut prendre $v^{(2)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $v^{(2)}_n = u_{2n+1}$. A-t-on, dans tous les cas, construit une sous-suite de u au sens de la définition 3.27 ? Oui, comme on va le voir dans la proposition suivante.

Proposition 3.28. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Soit D_0 une partie infinie de $\mathbb{N}$ qui est incluse dans D.*
Pour toute partie infinie D' de $\mathbb{N}$, il existe une sous-suite $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$ de u telle que l'ensemble des termes de v sont, dans le même ordre, ceux de la restriction de u à D_0, c'est-à-dire telle que

$$v(D') \;:=\; \{v_p\,;\; p \in D'\} \;=\; \{u_n\,;\; n \in D_0\} \;=:\; u(D_0)$$

et telle qu'on ait

$$\Big(\forall\,(p;q) \in (D')^2\,,\quad (p \leq q) \implies \big(\exists\,(n;m) \in D_0^2\,;\quad (n \,\leq\, m) \text{ et } (u_n \,=\, v_p) \text{ et } (u_m \,=\, v_q)\big)\Big)\,. \tag{3.20}$$

Encore une fois, nous sommes confrontés à la difficulté signalée dans la remarque 3.3. Pour démontrer cette proposition, on établit d'abord deux résultats préliminaires. On va utiliser des propriétés des bijections rappelées dans le paragraphe 1.1 (voir aussi le paragraphe 7.1).

Lemme 3.29. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Il existe une suite strictement croissante $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow D$ dont l'image $v(\mathbb{N}^*)$ est exactement D. En particulier, v est bijective.*

Preuve : Comme D est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet un minimum d, par la proposition 1.13.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(p)$ la proposition suivante :
Il existe une unique application $v^{(n)} : [\![1; n]\!] \longrightarrow D$ telle que $v^{(n)}(1) = d$ et, si $p \in [\![1; n[\![$,

$$v^{(n)}(p+1) \;=\; \min\Big(D \,\cap\,]\!]v^{(n)}(p)\,;\, +\infty[\![\Big)\,.$$

La seule application vérifiant les contraintes imposées par $\mathcal{P}(1)$ est $v : [\![1;1]\!] \longrightarrow D$ donnée par $v(1) = d$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $v^{(n+1)} : [\![1;n+1]\!] \longrightarrow D$ l'application, dont la restriction à $[\![1;n]\!]$ est $v^{(n)}$, l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$, et dont la valeur en $n+1$ est

$$v^{(n+1)}(n+1) \;=\; \min\Big(D \cap]\!]v^{(n)}(n)\,;\,+\infty[\![\Big)\,.$$

Comme D est une partie infinie de $\mathbb{N}$, $D \cap]\!]v^{(n)}(n)\,;\,+\infty[\![$ est non vide, d'après la proposition 1.13, et admet donc un minimum, d'après cette même proposition. Donc $v^{(n+1)}(n+1)$ est bien définie.
On a $v^{(n+1)}(1) = v^{(n)}(1) = d$. Si $p \in [\![1;n[\![$ alors $p+1 \leq n$ et $]\!]v^{(n+1)}(p)\,;\,+\infty[\![=]\!]v^{(n)}(p)\,;\,+\infty[\![$. Donc

$$v^{(n+1)}(p+1) \;=\; v^{(n)}(p+1) \;=\; \min\Big(D \cap]\!]v^{(n)}(p)\,;\,+\infty[\![\Big) \;=\; \min\Big(D \cap]\!]v^{(n+1)}(p)\,;\,+\infty[\![\Big)\,.$$

Comme $v^{(n+1)}(n) = v^{(n)}(n)$,

$$v^{(n+1)}(n+1) \;=\; \min\Big(D \cap]\!]v^{(n)}(n)\,;\,+\infty[\![\Big) \;=\; \min\Big(D \cap]\!]v^{(n+1)}(n)\,;\,+\infty[\![\Big)\,.$$

Donc $v^{(n+1)}$ vérifie les conditions imposées par $\mathcal{P}(n+1)$. Si w vérifie aussi ces dernières alors la restriction de w à $[\![1;n]\!]$ vérifie celles imposées par $\mathcal{P}(n)$ donc cette restriction coïncide avec $v^{(n)}$ et donc aussi avec la restriction de $v^{(n+1)}$ à $[\![1;n]\!]$. De plus, comme $w(n) = v^{(n)}(n)$,

$$w(n+1) \;=\; \min\Big(D \cap]\!]w(n)\,;\,+\infty[\![\Big) \;=\; \min\Big(D \cap]\!]v^{(n)}(n)\,;\,+\infty[\![\Big) \;=\; v^{(n+1)}(n+1)\,.$$

Donc $w = v^{(n+1)}$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $m \geq n$, la restriction à $[\![0;n]\!]$ de l'application $v^{(m)}$, fournie par $\mathcal{P}(m)$, vérifie les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n)$ donc cette restriction est forcément $v^{(n)}$, l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$.
Soit $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathcal{D}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v^{(n)}(n)$, où $v^{(n)}$ est l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} \;=\; v^{(n+1)}(n+1) \;=\; \min\Big(D \cap]\!]v^{(n+1)}(n)\,;\,+\infty[\![\Big) \;=\; \min\Big(D \cap]\!]v^{(n)}(n)\,;\,+\infty[\![\Big)$$

donc $v_{n+1} \in]\!]v^{(n)}(n)\,;\,+\infty[\![$ et $v_{n+1} > v^{(n)}(n) = v_n$. La suite v est donc strictement croissante. Elle est donc injective.
Soit $p \in D$ et $A_p := \{n \in \mathbb{N}^*; v_n \leq p\}$. Comme v est injective, sa restriction à A_p l'est aussi donc $v_{|A_p}$ est bijective de A_p sur $v(A_p)$. Or $v(A_p) \subset D \cap [\![0;p]\!]$ donc $v(A_p)$ est fini, par la proposition 1.13. Donc, par la proposition 9.1, A_p est aussi fini. Comme $v_1 = d = \min D \leq p$, $1 \in A_p$ et A_p est non vide. Par la proposition 1.12, A_p admet un maximum, noté n_p. On a $v_{n_p} \leq p$.
Supposons $v_{n_p} < p$. Alors $p \in D \cap]\!]v_{n_p}\,;\,+\infty[\![$ donc $v_{n_p} < v_{n_p+1} \leq p$ et $n_p + 1 \in A_p$. Contradiction avec la définition de n_p.
Donc $v_{n_p} = p$ et $p \in v(\mathbb{N}^*)$. D'où $D \subset v(\mathbb{N}^*)$. Comme $v(\mathbb{N}^*) \subset D$, on a $v(\mathbb{N}^*) = D$. On en déduit que v est bijective. $\square$

Lemme 3.30. *Soit D et D' deux parties infinies de $\mathbb{N}$. Il existe une bijection strictement croissante $\varphi : D' \longrightarrow D$.*

Preuve : On applique le lemme 3.29 à D et à D'. Il existe donc deux bijections strictement croissantes $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow D$ et $w : \mathbb{N}^* \longrightarrow D$ telles que $v(\mathbb{N}^*) = D$ et $w(\mathbb{N}^*) = D'$. La bijection réciproque $w^{\langle -1 \rangle}$ de w est aussi strictement croissante.
En effet, prenons $(n;n') \in (D')^2$ avec $n < n'$ et posons $p = w^{\langle -1 \rangle}(n) \in \mathbb{N}^*$ et $p' = w^{\langle -1 \rangle}(n') \in \mathbb{N}^*$. Si l'on avait $p \geq p'$, on aurait, comme w est croissante, $w(p) \geq w(p')$ soit $n = w(p) \geq w(p') = n'$ ce qui contredit $n < n'$. Donc, forcément, $p < p'$ soit $w^{\langle -1 \rangle}(n) < w^{\langle -1 \rangle}(n')$.

Soit $\varphi := v \circ w^{\langle -1 \rangle}$. φ est donc bijective de D' sur D, comme composée de bijections. Vérifions que φ est strictement croissante. Soit $(n; n') \in (D')^2$ avec $n < n'$. Comme $w^{\langle -1 \rangle}$ est strictement croissante, on a $w^{\langle -1 \rangle}(n) < w^{\langle -1 \rangle}(n')$. Comme v est strictement croissante, on a $v(w^{\langle -1 \rangle}(n)) < v(w^{\langle -1 \rangle}(n'))$. D'où $\varphi(n) = v(w^{\langle -1 \rangle}(n)) < v(w^{\langle -1 \rangle}(n')) = \varphi(n')$. □

Preuve de la proposition 3.28. : On applique le lemme 3.30 avec $(D; D')$ remplacé par $(D_0; D')$. Il existe donc une bijection strictement croissante $\varphi : D' \longrightarrow D_0$. On pose $v = u \circ \varphi$. v est bien définie car l'image $\varphi(D')$ de D' par φ est incluse dans D, le domaine de définition de u. Comme φ est une extractrice, v est une sous-suite de u, par la définition 3.27. De plus, comme φ est une bijection de D' sur D_0,

$$v(D') \; = \; \{v_p \, ; \; p \in D'\} \; = \; \{u_{\varphi(p)} \, ; \; p \in D'\} \; = \; \{u_n \, ; \; n \in \varphi(D')\} \; = \; \{u_n \, ; \; n \in D_0\} \; = \; u(D_0) \, .$$

Soit maintenant $(p; q) \in (D')^2$ avec $p \leq q$. Soit $n = \varphi(p)$ et $m = \varphi(q)$. Comme φ est strictement croissante, elle est croissante donc $n \leq m$. De plus, par définition de v, on a $u_n = u_{\varphi(p)} = v_p$ et $u_m = u_{\varphi(q)} = v_q$. On a donc montré (3.20). □

3.4 Limite d'une suite.

On introduit ici une notion de limite pour les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Il s'agit, pour une suite $u = (u_n)_{n \in D}$ de donner un sens précis au fait éventuel que les termes de la suite s'approchent d'une limite lorsque n devient grand.
On donne tout d'abord une définition générale de la limite d'une suite. Ensuite, on se penche plus en détails sur le cas des limites finies pour les suites réelles et complexes puis sur celui de limite infinie pour les suites réelles seulement. Pour ces deux types de limites, on donne diverses propriétés.

3.4.1 Définition générale de limite d'une suite.

Commençons par introduire une définition générale. Pour les suites complexes, on n'envisagera que des limites finies (i.e. dans $\mathbb{C}$). Pour les suites réelles, on considèrera des limites finies (i.e. dans $\mathbb{R}$) mais aussi des limites infinies. Pour motiver ces dernières, considérons la suite $u = (n)_{n \in \mathbb{N}}$. On voit que les termes deviennent de plus en plus grand et positif, quand n augmente. On a donc envie de dire que cette suite tend vers $+\infty$.

On définit ici la propriété intuitive que les termes de la suite u tendent vers une certaine limite ℓ lorsque n devient grand (lorsque "n tend vers l'infini"). De manière naturelle, on voudrait que cette définition soit telle que, si u a une limite, elle n'en a qu'une. D'autre part, il est raisonable d'imaginer des suites dont le comportement est "chaotique" et semble incompatible avec la notion intuitive de convergence vers une limite. On voudrait donc que la propriété d'avoir une limite ne soit pas commune à toutes les suites.

Pour établir cette définition, on va exploiter la notion de voisinage. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il s'agit de voisinages complexes d'un point. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on utilise les voisinages réels d'un point ainsi que les voisinages réels de $+\infty$ et $-\infty$. À ce sujet, on a la remarque suivante.

Remarque 3.31. *Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{K}$, on sait, par les propositions 2.3 et 2.6, que l'intersection de deux voisinages de ℓ est un voisinage de ℓ et qu'une partie contenant un voisinage de ℓ est aussi un voisinage de ℓ. Il en est de même lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.*
De plus, dans les deux cas précédents, si $\ell \neq \ell'$ alors il existe un voisinage A de ℓ et un voisinage B de ℓ' tel que $A \cap B = \emptyset$.
Enfin, si ℓ est finie alors tout voisinage de ℓ constient ℓ.

Définition 3.32. *Soit D une partie infine de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On dit que ℓ est limite de u si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,. \tag{3.21}$$

On rappelle que $\mathcal{V}_\ell$ désigne l'ensemble des voisinages de ℓ dans $\mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$, ces voisinages sont définis dans la définition 2.2. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, ils sont définis dans la définition 2.5. Enfin, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$, ils sont définis dans la définition 2.11.

On remarque que la proposition

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)$$

signifie que V contient tous les termes de la suite u à partir du rang N. La proposition (3.21) signifie donc que tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang.

Dans ce cadre général (et un peu abstrait), on est en mesure de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.33. *Soit D une partie infine de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère $(\ell; \ell') \in \mathbb{C}^2$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère $(\ell; \ell') \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$.*
Si (3.21) est vraie et si (3.21), avec ℓ remplacée par ℓ', est vraie, alors $\ell = \ell'$.
Si $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$ est une autre suite, qui coïncide avec u à partir d'un certain rang, c'est-à-dire telle qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n = v_n)\big)\,, \tag{3.22}$$

alors on a l'équivalence :

$$\big(\ell \text{ est limite de } u\big) \iff \big(\ell \text{ est limite de } v\big)\,. \tag{3.23}$$

Preuve :

a). On montre la première propriété par l'absurde. Supposons $\ell \neq \ell'$. D'après la remarque 3.31, il existe $(A; B) \in \mathcal{V}_\ell \times \mathcal{V}_{\ell'}$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Comme ℓ est limite de u, il existe, d'après (3.21), un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que A contienne tous les termes de u à partir du rang N_1. Comme ℓ' est limite de u, il existe, d'après (3.21), un $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que B contienne tous les termes de u à partir du rang N_2. Comme D est infinie, il existe $n \in D$ tel que $n \geq \max(N_1; N_2)$ (cf. proposition 1.13). Comme $n \geq N_1$, $u_n \in A$. Comme $n \geq N_2$, $u_n \in B$. D'où $u_n \in A \cap B$. Contradiction avec $A \cap B = \emptyset$.
On a montré que $\ell = \ell'$.

b). On suppose (3.22) vraie pour un $N \in \mathbb{N}$ et on montre l'équivalence (3.23).
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim u$ existe et vaut ℓ. On montre (3.21) avec u remplacée par v. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse (cf. (3.21) pour u), il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que V contienne tous les termes de u à partir du rang N_1. Soit $N_2 = \max(N; N_1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N_2$, on a, en utilisant d'abord le fait que $n \geq N$ puis le fait que $n \geq N_1$, $v_n = u_n \in V$. On a montré que $\ell = \lim v$.
$\Longleftarrow$) : Il suffit de reprendre l'argument précédent en échangeant les rôles de u et v. $\square$

La deuxième propriété montre ce que l'intuition suggérait : comme on s'intéresse à une propriété pour "n grand", rien n'est changé si l'on modifie un nombre fini de termes de la suite considérée. On peut aussi dire que l'on ne change pas la nature d'une suite en changeant un nombre fini de ses termes.
Quant à la première propriété, elle permet de parler de "la" limite d'une suite, lorsqu'elle existe.

Définition 3.34. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$.*
S'il existe ℓ tel que (3.21) est vraie, on dit que ℓ est la limite de u ou que u tend vers ℓ et on note

$$\ell = \lim u \quad \text{ou} \quad \ell = \lim_n u_n \quad \text{ou} \quad \ell = \lim_{n \to +\infty} u_n\,.$$

On dit que u est convergente, si elle admet une limite dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas, on dit aussi que u converge vers ℓ et que u est convergente vers ℓ.
Lorsque u n'admet pas de limite dans $\mathbb{K}$, on dit que u est divergente.

Attention : Il est important d'insister sur le fait qu'une suite peut ne pas avoir de limite. La proposition (3.21) peut être fausse pour toutes les limites envisageables. C'est le cas, comme on le vérifie ci-dessous, de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est pourquoi on ne parlera de la limite d'une suite qu'après avoir démontré (ou supposé) son existence. "Étudier la limite d'une suite" signifie donc de déterminer si elle existe et, éventuellement, de la calculer.

On verra plus loin plusieurs exemples de suites ayant une limite. Donnons ici un contre-exemple.
Soit $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérée comme suite réelle. Son comportement oscillant laisse penser qu'elle n'a pas de limite. Elle semble ne pas se concentrer près d'une valeur, ni devenir "très grande positive", ni devenir "très grande négative". Montrons par l'absurde qu'elle n'a pas de limite.
Supposons que la limite $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ de x existe. Considérons la disjonction suivante de cas.
<u>1er cas</u> : $\ell \neq 1$. Par la remarque 3.31, il existe un voisinage réel A de ℓ et un voisinage réel B de 1 tel que $A \cap B = \emptyset$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que A contienne tous les termes de la suite x à partir du rang N. Pour $n = 2N$, $x_n = 1$ donc $x_n \in B$. Comme $n = 2N \geq N$, $x_n \in A$. D'où $x_n \in A \cap B$, ce qui contredit $A \cap B = \emptyset$.
<u>2ième cas</u> : $\ell = 1$. Par la proposition 2.6 (ou la remarque 3.31), il existe un voisinage A de 1 et un voisinage B de -1 tel que $A \cap B = \emptyset$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que A contienne tous les termes de la suite x à partir du rang N. Pour $n = 2N + 1$, $x_n = -1$ donc $x_n \in B$. Comme $n = 2N + 1 \geq N$, $x_n \in A$. D'où $x_n \in A \cap B$, ce qui contredit $A \cap B = \emptyset$.
On a montré que x n'a pas de limite.

Il se trouve que l'on peut reformuler (3.21) en utilisant les voisinages dans D de $+\infty$ (cf. défintion 2.14). Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On rappelle que, pour toute partie A de D, l'image de A par u est l'ensemble $u(A) := \{u_n; n \in A\}$, et que, pour toute partie B de $\mathbb{K}$, l'image réciproque de B par u est l'ensemble $u^{-1}(B) := \{n \in D; u_n \in B\}$.

Proposition 3.35. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. La proposition (3.21) est équivalente à*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists W \in \mathcal{V}^D_{+\infty}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \in W) \implies (u_n \in V)\big) \tag{3.24}$$

et aussi à

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad u^{-1}(V) \in \mathcal{V}^D_{+\infty}\,. \tag{3.25}$$

Preuve : On montre successivement les implications (3.21) $\Longrightarrow$ (3.24) $\Longrightarrow$ (3.25) $\Longrightarrow$ (3.21).
(3.21) $\Longrightarrow$ (3.24) : On suppose (3.21) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,.$$

Soit $W := D \cap [\![N; +\infty[\![$. C'est un voisinage de $+\infty$ dans D. De plus, pour $n \in W$, on a $n \geq N$ donc, par la propriété précédente, $u_n \in V$. On a montré (3.24).
(3.24) $\Longrightarrow$ (3.25) : On suppose (3.24) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage W de $+\infty$ dans D tel que

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \in W) \implies (u_n \in V)\big)\,.$$

On montre que $W \subset u^{-1}(V)$. Soit $n \in W$. Par la propriété précédente, $u_n \in V$ donc, par définition de $u^{-1}(V)$, $n \in u^{-1}(V)$. On a donc bien $W \subset u^{-1}(V)$. Comme W est un voisinage de $+\infty$ dans D, $u^{-1}(V)$ en est aussi un, d'après la proposition 2.15. On a montré (3.25).
(3.25) $\Longrightarrow$ (3.21) : On suppose (3.25) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, $u^{-1}(V)$ est un voisinage de $+\infty$ dans D. Par définition, il existe un voisinage B de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$ tel que $u^{-1}(V) = B \cap D$. Par définition, il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $]\!]a; +\infty[\![\subset B$. Soit $N = a + 1$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $n \in B$ donc $n \in u^{-1}(V)$ c'est-à-dire $u_n \in V$. On a montré (3.21). $\square$

3.4.2 Limite finie.

On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$. On se concentre, dans ce paragraphe, sur les limites finies (i.e. celles appartenant à $\mathbb{K}$). On traite en parallèle les cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Rappelons la définition 3.32 dans ce cas :

Définition 3.36. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que ℓ est limite de u si tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, i.e. si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,. \tag{3.26}$$

Il est commode d'introduire la reformulation suivante de la proposition (3.26).

Proposition 3.37. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. Alors la proposition* (3.26) *est équivalente à*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (|u_n - \ell| < \epsilon)\big)\,. \tag{3.27}$$

Preuve : Pour $\epsilon > 0$ et $n \in D$, la proposition $(|u_n - \ell| < \epsilon)$ est équivalente à $(u_n \in D(\ell; \epsilon[)$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et à $(u_n \in I(\ell; \epsilon[)$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Traitons d'abord le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
(3.26) $\Longrightarrow$ (3.27) : on suppose que (3.26) est vraie. Soit $\epsilon > 0$. On applique (3.26) au voisinage $V = D(\ell; \epsilon[$ de ℓ. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que ce V contienne tous les termes de u à partir du rang N. On a donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \in D(\ell; \epsilon[$ donc $|u_n - \ell| < \epsilon$. On a montré (3.27).
(3.27) $\Longrightarrow$ (3.26) : on suppose (3.27) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition de voisinage, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell; \epsilon[\subset V$. On applique (3.27) à cet ϵ. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| < \epsilon$, c'est-à-dire $u_n \in D(\ell; \epsilon[$. Comme $D(\ell; \epsilon[\subset V$, on a donc, pour $n \in D$ et $n \geq N$, $u_n \in V$. On a montré (3.26).
Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut reprendre les arguments précédents en remplaçant le disque $D(\ell; \epsilon[$ par l'intervalle centré $I(\ell; \epsilon[$. $\square$

Voyons maintenant quelques exemples. Soit $c \in \mathbb{K}$, D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ la suite constante égale à c. Montrons que u converge vers c. On montre (3.27) avec ℓ remplacé par c.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $N = 2022$. Pour $n \in D$ et $n \geq N$, on a $|u_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \epsilon$.
On remarque que, dans ce cas, on aurait pu prendre $N = 1$ ou même $N = 0$.
Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $u_n = 1/n$. On devine qu'elle converge vers 0. Montrons-le.
Soit $\epsilon > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = (1/\epsilon) + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq (1/\epsilon) + 1$ donc $N > 1/\epsilon$. Donc $\epsilon > 1/N$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$, on a $0 < 1/n \leq 1/N < \epsilon$ donc $|1/n| < \epsilon$. On a montré que $\lim u$ existe et vaut 0.
Soit $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $v_n = 2i/n$. Là aussi, on devine que 0 est limite de v. On remarque que, pour tout $n > 0$, $|v_n| = 2/n$.
Soit $\epsilon > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = (2/\epsilon) + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq (2/\epsilon) + 1$ donc $N > 2/\epsilon$. Donc $\epsilon > 2/N$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$, on a $|v_n - 0| = |v_n| = 2/n \leq 2/N < \epsilon$. Donc $\lim v = 0$.
Soit $w : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$w_n \;=\; \frac{3}{1 + \frac{1}{n}}\,.$$

On devine que w tend vers 3. Montrons-le.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que

$$|w_n - 3| \;=\; 3 \cdot \left|\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - 1\right| \;=\; 3 \cdot \left|\frac{1 - (1 + \frac{1}{n})}{1 + \frac{1}{n}}\right| \;=\; 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \;=\; \frac{3}{n+1}\,.$$

Soit $\epsilon > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = (3/\epsilon) + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq (3/\epsilon) + 1$ donc $N > 3/\epsilon$. Donc $\epsilon > 3/N$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$, on a, grâce au calcul précédent, $|w_n - 3| = 3/(n + 1) \leq 3/N < \epsilon$. Donc $\lim w = 3$.

3.4.3 Notions de limite infinie propres aux suites réelles.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux limites infinies de suites réelles (i.e. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On réécrit la définition 3.32 dans ce cadre.

Définition 3.38. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$. On dit que ℓ est limite de u si tout voisinage réel de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, i.e. si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell \,, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in D \,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V) \big) \,. \tag{3.28}$$

Attention : D'après la définition 3.34, on dit qu'une suite réelle, qui a une limite, converge uniquement si cette limite est un réel. Une suite réelle qui tend vers $+\infty$ diverge donc. Une suite réelle qui tend vers $-\infty$ diverge aussi.

Comme pour les limites finies, on dispose d'une autre formulation de la définition d'une limite infinie.

Proposition 3.39. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$.*
Lorsque $\ell = +\infty$, la proposition (3.28) *est équivalente à*

$$\forall L > 0 \,, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in D \,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n > L) \big) \,. \tag{3.29}$$

Lorsque $\ell = -\infty$, la proposition (3.28) *est équivalente à*

$$\forall L > 0 \,, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in D \,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n < -L) \big) \,. \tag{3.30}$$

Preuve : On traite le cas où $\ell = +\infty$ seulement. L'autre cas est similaire.
(3.28) $\implies$ (3.29) : On suppose (3.28) vraie. Soit $L > 0$. On applique la propriété (3.28) au voisinage $V =]L; +\infty[$ de $+\infty$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, V contienne tous les termes de u à partir du rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a donc $u_n \in V$ c'est-à-dire $u_n > L$. On a donc montré (3.29).
(3.29) $\implies$ (3.28) : On suppose (3.29) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par définition de voisinage, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a; +\infty[\subset V$. Comme $|a| + 1 \geq |a| \geq a$, on a, en posant $L = |a| + 1 > 0$, $]L; +\infty[\subset]a; +\infty[\subset V$. En appliquant (3.29) à ce L, on trouve un $N \in \mathbb{N}$ tel que tous les termes de u sont dans $]L; +\infty[$ à partir du rang N. Donc, comme $]L; +\infty[\subset V$, V contient tous les termes de u à partir du rang N. On a montré (3.28). □

Voyons quelques exemples. Soit $id : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$. Vérifions que $+\infty$ est sa limite. Soit $L > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = L + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq L + 1$ donc $N > L$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a $n \geq N > L$ soit $n > L$. D'après (3.29), on a montré que

$$+\infty \;=\; \lim_{n \to \infty} n \,.$$

Montrons maintenant que $-\infty = \lim\limits_{n}(-n^2)$. Soit $L > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = \sqrt{L + 1}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq \sqrt{L + 1}$. Comme $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante, $\sqrt{L + 1} > \sqrt{L}$ d'où $N > \sqrt{L}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a $n^2 \geq N^2 > L$ donc $-n^2 < -L$. D'après (3.30), on a démontré la propriété souhaitée.

3.5 Propriétés générales de la limite d'une suite.

On se place de nouveau dans le cas général où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on établit plusieurs propriétés sur les limites finies de suite. On rappelle que l'on a défini le module d'une suite complexe et la valeur absolue d'une suite réelle dans la définition 3.20.

Proposition 3.40. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On a*

$$\big(\lim u \;=\; \ell\big) \iff \big(\lim_n |u_n \;-\; \ell| \;=\; 0\big)\,. \tag{3.31}$$

En particulier, quand $\ell = 0$, on a

$$\big(\lim u \;=\; 0\big) \iff \big(\lim |u| \;=\; 0\big)\,. \tag{3.32}$$

De plus, on a

$$\big(\lim u \;=\; \ell\big) \implies \big(\lim |u| \;=\; |\ell|\big)\,. \tag{3.33}$$

Enfin, on suppose qu'il existe une suite réelle $w : D \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tendant vers 0 et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \;\geq\; N) \implies \big(|u_n \;-\; \ell| \;\leq\; w_n\big)\big)\,. \tag{3.34}$$

Alors la suite u converge vers ℓ. ("Théorème des gendarmes".)

Attention : il faut lire "$(\lim u \;=\; \ell)$" comme suit : "la limite de u existe et vaut ℓ".
La réciproque de (3.33) est fausse comme le montre le contre-exemple suivant : soit $u = (1)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $|u| = u$ est constante égale à 1, on a $\lim u = 1 = \lim |u|$. On a aussi $\lim |u| = |-1|$. Si cette réciproque était vraie, on aurait alors $\lim u = -1$. Contradiction.
En raison d'une similitude avec une propriété, propre aux suites réelles, que l'on verra plus loin (cf. proposition 3.43 et (3.38)), il est légitime de qualifier la dernière propriété de la proposition 3.40 de "propriété des gendarmes" ou "théorème des gendarmes".

Preuve de la proposition 3.40. :

a). On montre d'abord la dernière propriété. Sous les hypothèses de son énoncé, on montre que u tend vers ℓ en utilisant (3.27). Soit $\epsilon > 0$. Comme w tend vers 0, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq w_n < \epsilon$ soit vraie à partir du rang N_1 (cf. (3.27) avec u remplacée par w et ℓ remplacée par 0). Pour $n \in D$ avec $n \geq \max(N; N_1)$, on a $n \geq N$ donc, par (3.34),

$$\big|u_n \;-\; \ell\big| \;\leq\; w_n \;<\; \epsilon$$

car $n \geq N_1$. On a montré $\lim u = \ell$.

b). On remarque que, pour tout $n \in D$,

$$\big||u_n \;-\; \ell| \;-\; 0\big| \;=\; |u_n \;-\; \ell|$$

donc (3.27) est identique à (3.27) avec u remplacée par $|u - \ell|$ et ℓ remplacé par 0. Ceci prouve l'équivalence (3.31).

c). Montrons (3.33). On suppose que $\lim u = \ell$. Par (2.3), on a, pour tout $n \in D$,

$$\big||u_n| \;-\; |\ell|\big| \;\leq\; |u_n \;-\; \ell|\,.$$

Par l'hypothèse et (3.31), la suite $w = |u - \ell|$ tend vers 0. D'après l'inégalité précédente, on peut appliquer le théorème des gendarmes à $|u|$ (cf. a)), qui donne $\lim |u| = |\ell|$. □

On montre maintenant que la convergence des suites est préservée par certaines opérations sur les suites.

Proposition 3.41. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(\ell; \ell') \in \mathbb{K}^2$, tels que $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$. Alors les limites suivantes existent et on a*

$$\lim(u + v) \;=\; \ell + \ell'\,, \quad \lim(\lambda u) \;=\; \lambda \cdot \ell\,, \quad \lim(uv) \;=\; \ell \cdot \ell'\,.$$

Si, de plus, $\ell \neq 0$, alors la suite $1/u$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $1/\ell$, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \neq 0$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} \;=\; \frac{1}{\ell}\,.$$

Preuve :

a). On montre que $\ell + \ell'$ est limite de $u + v$, c'est-à-dire la proposition (3.27) avec u remplacée par $u + v$ et ℓ remplacé par $\ell + \ell'$.

On remarque tout d'abord que, pour tout $n \in D$,

$$\big|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\big| = \big|(u_n - \ell) + (v_n - \ell')\big| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|, \tag{3.35}$$

d'après l'inégalité triangulaire (cf. (2.2) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et (2.6) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim u = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| < (\epsilon/2)$. De même, comme $\lim v = \ell'$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_2$, on ait $|v_n - \ell'| < (\epsilon/2)$. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant (3.35) puis le fait que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$,

$$\big|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\big| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

On a montré que $\ell + \ell'$ est limite de $u + v$.

b). On montre maintenant que $\ell \cdot \ell'$ est limite de $u \cdot v$, c'est-à-dire la proposition (3.27) avec u remplacée par $u \cdot v$ et ℓ remplacé par $\ell \cdot \ell'$.

On écrit tout d'abord, pour tout $n \in D$,

$$(u_n \cdot v_n) - (\ell \cdot \ell') = u_n \cdot (v_n - \ell') + (u_n - \ell) \cdot \ell'\,.$$

Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\big|(u_n \cdot v_n) - (\ell \cdot \ell')\big| \leq |u_n| \cdot \big|v_n - \ell'\big| + |u_n - \ell| \cdot |\ell'|\,. \tag{3.36}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit

$$\epsilon' \in \left]0\,;\, \min\left(1; \frac{\epsilon}{|\ell| + |\ell'| + 1}\right)\right]\,.$$

Comme $\lim u = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| < \epsilon'$. De même, comme $\lim v = \ell'$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_2$, on ait $|v_n - \ell'| < \epsilon'$. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant le fait que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$, $|v_n - \ell'| < \epsilon'$, $|u_n - \ell| < \epsilon'$ et donc aussi

$$|u_n| = \big|(u_n - \ell) + \ell\big| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < \epsilon' + |\ell|\,.$$

Donc, d'après (3.36) et le choix de ϵ',

$$\big|(u_n \cdot v_n) - (\ell \cdot \ell')\big| < \big(\epsilon' + |\ell|\big) \cdot \epsilon' + \epsilon'|\ell'| \leq \epsilon' \cdot \big(1 + |\ell| + |\ell'|\big) \leq \epsilon\,.$$

On a montré que $\lim(uv) = \ell\ell'$.

c). En remplaçant la suite v par la suite constante égale à λ, qui converge vers λ, dans le résultat précédent, on obtient $\lim(\lambda u) = \lambda\ell$.

d). On suppose maintenant que $\ell \neq 0$. Par la remarque 3.31, il existe un voisinage A de ℓ et un voisinage B de 0 tels que $A \cap B = \emptyset$. Comme $\lim u = \ell$, le voisinage A contient tout les termes de la suite u à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Comme $A \cap B = \emptyset$, ces termes n'appartiennent pas à B donc ne peuvent être nuls, car $0 \in B$. Soit $D_0 = D \cap [\![N_0; +\infty[\![$. La suite

$$x = (1/u_n)_{n \in D_0}$$

est donc bien définie. Montrons qu'elle tend vers $1/\ell$, via la version appropriée de (3.27).

Comme B est un voisinage de 0, il existe $\delta_0 > 0$ tel que le disque $D(0; \delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et l'intervalle $I(0; \delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour $n \in D_0$, on a $u_n \notin B$, donc $u_n \notin D(0; \delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $u_n \notin I(0; \delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire $|u_n| \geq \delta_0$. De plus, pour $n \in D_0$,

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - u_n}{u_n \cdot \ell}$$

donc

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{|u_n| \cdot |\ell|} \leq \frac{|u_n - \ell|}{\delta_0 \cdot |\ell|} . \tag{3.37}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit $\epsilon' \in]0; \delta_0 \cdot |\ell| \cdot \epsilon]$, ce qui est possible car $\delta_0 \cdot |\ell| \cdot \epsilon > 0$. Comme $\lim u = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| < \epsilon'$. Soit $N = \max(N_0; N_1)$. Pour $n \in D_0$ et $n \geq N$, on a $n \geq N_1$ et, d'après (3.37),

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{\epsilon'}{\delta_0 \cdot |\ell|} \leq \epsilon .$$

On a montré que $\lim(1/u) = 1/\ell$. □

Pour terminer ce paragraphe, donnons un résultat commode sur la convergence des suites complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On rappelle que l'on a défini les parties réelle et imaginaire d'une suite complexe dans la définition 3.21.
On veut étudier la limite de la suite $u = (3 + i/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On voit que $\Re(u)$ est la suite réelle constante égale à 3 sur $\mathbb{N}^*$. Elle converge donc vers 3. Quant à $\Im(u)$, c'est la suite réelle $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ que l'on a étudiée plus haut. On a vu qu'elle converge vers 0. Que peut-on dire sur la convergence de la suite u ? La proposition 3.42 ci-dessous permet de répondre.

Proposition 3.42. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On a l'équivalence*

$$\lim u = \ell \iff \Big(\big(\lim \Re(u) = \Re(\ell)\big) \quad et \quad \big(\lim \Im(u) = \Im(\ell)\big)\Big) .$$

Preuve : On procède par double implication.
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim u = \ell$. Pour tout $n \in D$, on a, d'après (2.4),

$$\big|(\Re(u))_n - \Re(\ell)\big| = \big|\Re(u_n - \ell)\big| \leq |u_n - \ell| \quad \text{et} \quad \big|(\Im(u))_n - \Im(\ell)\big| = \big|\Im(u_n - \ell)\big| \leq |u_n - \ell| .$$

En appliquant deux fois la propriété des gendarmes de la proposition 3.40 avec $w_n = |u_n - \ell|$, on en déduit que $\lim \Re(u)$ existe et vaut $\Re(\ell)$ et que $\lim \Im(u)$ existe et vaut $\Im(\ell)$.
$\Longleftarrow$) : On suppose que $\Re(u)$ converge vers $\Re(\ell)$ et que $\Im(u)$ converge vers $\Im(\ell)$. Par la proposition 3.41 (avec u remplacée par $\Im(u)$ et $\lambda = i$), $i\Im(u)$ converge vers $i\Im(\ell)$. Par la proposition 3.41 (avec u remplacée par $\Re(u)$ et v remplacée par $i\Im(u)$), $u = \Re(u) + i\Im(u)$ converge vers $\Re(\ell) + i\Im(\ell) = \ell$. □

Exemple d'application : On s'intéresse maintenant à la suite $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $n > 0$, $v_n = (1/(n+1)) + ni$. On remarque que $\Im(v) = (n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a vu plus haut que $\lim \Im(v) = +\infty$. Donc $\Im(v)$ n'a pas de limite finie. Par proposition 3.42, la limite de v n'existe pas puisque la proposition de droite de l'équivalence est fausse pour tout $\ell \in \mathbb{C}$.

3.6 Propriétés de limite propres aux suites réelles.

On revient dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on établit, pour les suites réelles, un pendant de la proposition 3.41 pour des limites infinies et certaines propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On commence par des propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. On rappelle la **convention** que l'on a prise au paragraphe 1.2 : on décide que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et aussi à $-\infty$; on décide que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel.

Proposition 3.43. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$, tels que $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$.*

1. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b < \ell$. Alors u est strictement supérieure à b à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n > b$.*

2. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \ell$. Alors u est strictement inférieure à b à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n < b$.*
3. *Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors u est bornée.*
4. *On suppose que u est inférieure à v à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \leq v_n$. Alors $\ell \leq \ell'$.*
5. *On suppose qu'une suite réelle $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est encadrée par u et v à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \leq x_n \leq v_n$, et que $\ell = \ell' \in \mathbb{R}$. Alors $\lim x$ existe et vaut $\ell = \ell'$.*
6. *On suppose qu'une suite réelle $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est minorée par u à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \leq x_n$, et que $\ell = +\infty$. Alors $\lim x$ existe et vaut $\ell = +\infty$.*
7. *On suppose qu'une suite réelle $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée par v à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $x_n \leq v_n$, et que $\ell' = -\infty$. Alors $\lim x$ existe et vaut $\ell' = -\infty$.*

Avant de démontrer cette proposition, faisons quelques commentaires.
On ne peut appliquer la proposition 3.43 à u (ou à u et v) que si l'on sait déjà que u a une limite (ou que u et v ont une limite).
Grâce à la convention précédente, les propriétés ont bien un sens lorsque une (les) limite(s) sont infinie(s). De plus, elles sont encore vraies.
La propriété 1 donne, en particulier, que, si u tend vers une limite strictement positive (y compris $+\infty$), alors u est strictement positive à partir d'un certain rang.
La propriété 2 donne, en particulier, que, si u tend vers une limite strictement négative (y compris $-\infty$), alors u est strictement négative à partir d'un certain rang.
La propriété 4 s'interprète comme un passage à la limite $n \to \infty$ dans les inégalités $u_n \leq v_n$, qui sont vraies à partir d'un certain rang. Si l'on suppose que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, on a seulement $\ell \leq \ell'$, en général comme le montre le contre-exemple suivant :
Soit $u = (0)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0 < v_n$. On a bien l'existence de $\lim u$ et de $\lim v$ mais $\lim u = 0 = \lim v$. La proposition ($\lim u < \lim v$) est donc fausse.
On peut reformuler ceci en disant que, quand on passe à la limite $n \to \infty$ dans des inégalités strictes, on tombe sur une inégalité large.
On utilise souvent cette propriété 4 lorsque l'une des suites est constante. Par exemple, si l'on considère une suite réelle positive qui converge alors sa limite est positive (en appliquant la propriété 4 avec u constante égale à 0).
La propriété 5 est appelée "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes". Les suites u et v jouent le rôle de gendarme. On remarque que, dans le cas où $u = -v$ et $\ell = \ell' = 0$, on a, pour $n \in D$, les équivalences

$$(u_n \leq x_n \leq v_n) \iff (-v_n \leq x_n \leq v_n) \iff (|x_n| \leq v_n)\,. \tag{3.38}$$

Ceci explique la terminologie utilisée dans la proposition 3.40.
En raison de leur proximité avec la propriété 5, on peut aussi désigner par "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes" les propriétés 6 et 7, même s'il n'y a qu'un seul "gendarme".

Preuve de la proposition 3.43 :

1. Soit $V :=]b; +\infty[$. On vérifie que c'est un voisinage de ℓ.
   <u>Cas où $\ell \in \mathbb{R}$</u> : Par hypothèse $(\ell - b)/2 > 0$ donc V est un voisinage de ℓ car il contient l'intervalle $I(\ell; (\ell - b)/2[)$ centré en ℓ.
   <u>Cas où $\ell = +\infty$</u> : L'ensemble V est un voisinage de $+\infty$.
   Comme $\ell = \lim u$, V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n \in V$, ce qui donne $u_n > b$.
2. Soit $V :=] - \infty; b[$. On vérifie que c'est un voisinage de ℓ.
   <u>Cas où $\ell \in \mathbb{R}$</u> : Par hypothèse $(b - \ell)/2 > 0$ donc V est un voisinage de ℓ car il contient l'intervalle $I(\ell; (b - \ell)/2[)$ centré en ℓ.

Cas où $\ell = -\infty$: L'ensemble V est un voisinage de $-\infty$.
Comme $\ell = \lim u$, V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n \in V$, ce qui donne $u_n < b$.

3. Comme $\ell \in \mathbb{R}$, u est majorée par $\ell + 1$ à partir d'un certain rang, d'après 1. Comme on l'a vu au paragraphe 3.3.2, cela prouve que u est majorée. En utilisant 2 avec $b = \ell - 1$, on obtient que u est minorée par $\ell + 1$ à partir d'un certain rang, donc aussi minorée, en utilisant encore le paragraphe 3.3.2. u est donc bornée.
4. On raisonne par l'absurde. Supposons que $\ell > \ell'$. On montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $V :=]b; +\infty[$ est un voisinage de ℓ et $V' :=] - \infty; b[$ est un voisinage de ℓ'.
Cas où $\ell = +\infty$: Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \ell'$. V est un voisinage de $\ell = +\infty$. Si $\ell' = -\infty$, V' est un voisinage de ℓ'. Si $\ell' \in \mathbb{R}$, on a, comme $b > \ell'$, $b - \ell' > 0$ et V' contient l'intervalle $I(\ell'; b - \ell'[$ centré en ℓ', donc V' est un voisinage de ℓ'.
Cas où $\ell \in \mathbb{R}$: Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\ell > b > \ell'$. Comme précédemment, V' est un voisinage de ℓ'. On a $\ell - b > 0$ et V contient l'intervalle $I(\ell; \ell - b[$ centré en ℓ, donc V est un voisinage de ℓ.
Comme $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$, il existe $(N_1; N_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que, V contient les termes de u à partir du rang N_1 et V' contient les termes de v à partir du rang N_2. Soit $n \in D$ tel que $n \geq \max(N; N_1; N_2)$. On a donc $u_n \leq v_n$, car $n \geq N$, $u_n \in V$, car $n \geq N_1$ et $v_n \in V'$, car $n \geq N_2$. Donc $v_n < b < u_n$ et $u_n \leq v_n$, contradiction. Conclusion : $\ell \leq \ell'$.
5. Lorsque $\ell = +\infty$, la propriété est une conséquence de 6. Lorsque $\ell = -\infty$, la propriété est une conséquence de 7. On traite le cas où $\ell \in \mathbb{R}$. On montre (3.27) avec u remplacée par x et N remplacé par N' (N étant déjà défini dans l'hypothèse).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \lim u$, $I(\ell; \epsilon[$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\ell = \lim v$, $I(\ell; \epsilon[$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N' = \max(N; N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N'$, on a, comme $n \geq N$, $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, en utilisant la proposition 2.7,
$$\ell - \epsilon \, < \, u_n \, \leq \, x_n \, \leq \, v_n \, < \, \ell + \epsilon \, ,$$
c'est-à-dire $x_n \in I(\ell; \epsilon[$. On a montré (3.27) avec u remplacée par x, donc $\lim x$ existe et vaut ℓ.
6. On montre (3.29) avec u remplacée par x et N remplacé par N' (N étant déjà défini dans l'hypothèse).
Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Soit $N' = \max(N; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N'$, on a, comme $n \geq N$ et $n \geq N_1$,
$$x_n \, \geq \, u_n \, > \, L \, .$$
Donc $\lim x$ existe et vaut $+\infty$.
7. On montre (3.30) avec u remplacée par x et N remplacé par N' (N étant déjà défini dans l'hypothèse).
Soit $L > 0$. Comme $\lim v = -\infty$, le voisinage $] - \infty; -L[$ de $-\infty$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_1. Soit $N' = \max(N; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N'$, on a, comme $n \geq N$ et $n \geq N_1$,
$$x_n \, \leq \, v_n \, < \, -L \, .$$
Donc $\lim x$ existe et vaut $+\infty$. □

Maintenant, on reprend la situation de la proposition 3.41 mais pour des suites réelles et seulement lorsque au moins l'une des limites ℓ et ℓ' est infinie.

Proposition 3.44. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$, tels que $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$. Alors, dans les cas suivants, les limites suivantes existent et on a :*

a). Si $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $\lim(u + v) = \ell$;
b). Si $\ell' = \ell$ alors $\lim(u + v) = \ell$;
c). Si $\lambda > 0$ alors $\lim(\lambda u) = \ell$ et si $\lambda < 0$ alors $\lim(\lambda u) = -\ell$;
d). Si $\lambda = 0$ alors $\lim(\lambda u) = 0$;

e). Si $\ell' > 0$ alors $\lim(uv) = \ell$ et si $\ell' < 0$ alors $\lim(uv) = -\ell$;
f). La suite $1/u$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers 0, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \neq 0$ et $\lim(1/u) = 0$.
g). Si $w : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite réelle, à termes strictement positifs à partir d'un certain rang, qui converge vers 0 alors $1/w$ est bien définie à partir de ce rang et $\lim(1/w) = +\infty$.
h). Si $w : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite réelle, à termes strictement négatifs à partir d'un certain rang, qui converge vers 0 alors $1/w$ est bien définie à partir de ce rang et $\lim(1/w) = -\infty$.

Quelques précisions s'imposent.
Pour $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$, $-\ell$ signifie $+\infty$ si $\ell = -\infty$ et $-\ell$ signifie $-\infty$ si $\ell = +\infty$.
Dans le cas où $\ell' = -\ell$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$, le résultat ne dit rien sur la suite $(u + v)$. La raison en est que tout peut se passer : On peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u + v) = 0$. Plus généralement, étant donné $m \in \mathbb{R}$, on peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u + v) = m$. On peut aussi construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u + v) = +\infty$ ("u l'emporte sur v"). On peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u + v) = -\infty$ ("v l'emporte sur u"). Enfin, on peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $(u + v)$ n'a pas de limite. C'est pourquoi l'on qualifie cette situation ($\ell' = -\ell$ pour $(u + v)$) comme indéterminée.
Une autre situation indéterminée est la suivante : $\ell' = 0$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ pour uv. Là encore, on peut donner des exemples de suites réelles u et v telles que leur produit tend vers un nombre réel non nul, ou bien telles que leur produit tend vers 0, ou bien telles que leur produit tend vers ℓ, ou bien telles que leur produit tend vers $-\ell$, ou encore telles que leur produit n'a pas de limite.
En utilisant le théorème des gendarmes, on peut montrer que la suite $w = ((-1)^n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Comme tous les termes de w sont non nuls, $(1/w)$ est bien définie mais on peut vérifier qu'elle n'a pas de limite.

Preuve de la proposition 3.44 :

a). On sépare les cas où $\ell = +\infty$ et où $\ell = -\infty$.
Cas $\ell = +\infty$: On montre que $\lim(u+v) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.29) avec u remplacée par $u + v$. Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par cette même proposition (3.29), que le voisinage $]L'; +\infty[$ de $+\infty$, avec $L' = \max(1; L - \ell' + 1) > 0$, contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par la proposition (3.26) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]\ell' - 1; \ell' + 1[$ de ℓ' contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$,
$$u_n + v_n > L' + (\ell' - 1) \geq (L - \ell' + 1) + (\ell' - 1) = L .$$
On a montré que $\lim(u + v) = +\infty$.
Cas $\ell = -\infty$: On montre que $\lim(u+v) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.30) avec u remplacée par $u + v$. Soit $L > 0$. Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par cette même proposition (3.30), que le voisinage $] - \infty; -L'[$ de $-\infty$, avec $L' = \max(1; L + \ell' + 1) > 0$, contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par la proposition (3.26) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]\ell' - 1; \ell' + 1[$ de ℓ' contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$,
$$u_n + v_n < -L' + (\ell' + 1) \leq -(L + \ell' + 1) + (\ell' + 1) = -L .$$
On a montré que $\lim(u + v) = -\infty$.

b). On sépare les cas où $\ell = \ell' = +\infty$ et où $\ell = \ell' = -\infty$.
Cas $\ell = \ell' = +\infty$: On montre que $\lim(u + v) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.29) avec u remplacée par $u + v$. Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par cette même proposition (3.29), que le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = +\infty$, on sait, par la proposition (3.29) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]0; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$,
$$u_n + v_n > L + 0 = L .$$

On a montré que $\lim(u+v) = +\infty$.
Cas $\ell = \ell' = -\infty$: On montre que $\lim(u+v) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.30) avec u remplacée par $u+v$. Soit $L > 0$. Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par cette même proposition (3.30), que le voisinage $]-\infty; -L[$ de $-\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = -\infty$, on sait, par la proposition (3.30) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]-\infty; 0[$ de $-\infty$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$,

$$u_n + v_n < -L + 0 = -L .$$

On a montré que $\lim(u+v) = -\infty$.

c). On traite seulement le cas où $\ell = +\infty$. L'autre cas est similaire.
Cas où $\lambda > 0$: on montre que $\lim(\lambda u) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.29) avec u remplacée par (λu). Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par cette même proposition (3.29), que le voisinage $]L/\lambda; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a

$$(\lambda u)_n = \lambda \cdot u_n > \lambda \cdot \frac{L}{\lambda} = L .$$

On a montré que $\lim(\lambda u) = +\infty$.
Cas où $\lambda < 0$: on montre que $\lim(\lambda u) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.30) avec u remplacée par (λu). Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par la proposition (3.29), que le voisinage $]L/|\lambda|; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > L/|\lambda|$ et, comme $\lambda < 0$,

$$(\lambda u)_n = \lambda \cdot u_n < \lambda \cdot \frac{L}{|\lambda|} = -L .$$

On a montré que $\lim(\lambda u) = -\infty$.

d). Comme (λu) est constante égale à 0, elle converge vers 0.

e). On traite seulement le cas où $\ell = +\infty$. L'autre cas est similaire.
Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par le 1 de la proposition 3.43, que u est strictement positive à partir d'un certain rang N_1.
Cas où $\ell' > 0$: Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par le 1 de la proposition 3.43, que v est strictement supérieure à $\ell'/2 > 0$ à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > 0$ et $v_n > \ell'/2 > 0$ donc $u_n v_n \geq (\ell'/2)u_n$. Par c), $\lim(\ell'/2)u = +\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 3.43), on en déduit que $\lim uv = +\infty$.
Cas où $\ell' < 0$: Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par le 2 de la proposition 3.43, que v est strictement inférieure à $\ell'/2 < 0$ à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > 0$ et $v_n < \ell'/2 < 0$ donc $u_n v_n \leq (\ell'/2)u_n$. Par c), $\lim(\ell'/2)u = -\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 7 de la proposition 3.43), on en déduit que $\lim uv = -\infty$.

f). On traite seulement le cas où $\ell = +\infty$. L'autre cas est similaire.
Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par le 1 de la proposition 3.43, que u est strictement positive à partir d'un certain rang N_0. Donc $(1/u)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/u) = 0$ en utilisant la proposition (3.26).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, le voisinage $]1/\epsilon; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > (1/\epsilon) > 0$ donc $0 < (1/u_n) < \epsilon$. On a montré que $\lim(1/u) = 0$.

g). Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que w soit strictement positive à partir du rang N_0. Donc $(1/w)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/w) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.29).
Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim w = 0$, le voisinage $]-(1/L); (1/L)[$ de 0 contient tous les termes de w à partir d'un certain rang N_1. Soit $N = \max(N_0; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, $w_n > 0$ et $w_n \in]-(1/L); (1/L)[$ donc $0 < w_n < (1/L)$, d'où $(1/w_n) > L$. On a montré que $\lim(1/w) = +\infty$.

h). Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que w soit strictement négative à partir du rang N_0. Donc $(1/w)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/w) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.30).
Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim w = 0$, le voisinage $]-(1/L); (1/L)[$ de 0 contient tous les

termes de w à partir d'un certain rang N_1. Soit $N = \max(N_0; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, $w_n < 0$ et $w_n \in]-(1/L);(1/L)[$ donc $0 < -w_n < (1/L)$, d'où $(1/w_n) < -L$. On a montré que $\lim(1/w) = -\infty$. □

On revient maintenant sur les notions de bornes supérieure et inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, que l'on a introduites au paragraphe 1.2. On rappelle que l'on a décidé, par **convention**, que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel. Ainsi, pour une partie A non vide de $\mathbb{R}$, $+\infty$ est un majorant de A et $-\infty$ est un minorant de A (cf. paragraphe 1.2).

Proposition 3.45. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.*
$\ell = \sup A$ si et seulement si ℓ majore A et s'il existe une suite d'éléments de A qui tend vers ℓ.
$\ell = \inf A$ si et seulement si ℓ minore A et s'il existe une suite d'éléments de A qui tend vers ℓ.

Preuve :

a). On montre la première équivalence dans le cas $\ell = +\infty$.

$\Longrightarrow$) : On suppose que $\sup A = +\infty$. Par définition, cela signifie que A est non majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n n'est pas un majorant de A donc il existe au moins un $a_n \in A$ tel que $a_n > n$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. Comme $\lim_n n = +\infty$, on a, d'après le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 3.43), $\lim a = +\infty$. Enfin, $+\infty$ est bien un majorant de A.

$\Longleftarrow$) : On suppose que $+\infty$ est limite d'une suite a d'éléments de A. On montre que A est non majorée. Supposons que A soit majorée par $m \in \mathbb{R}$. Comme $]m; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$, il contient tous les termes de la suite a à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$. Un tel terme de a est strictement supérieur à m et, comme il est dans A, il est aussi inférieur ou égal à m. Contradiction. Donc A n'est pas majorée et $\sup A = +\infty$.

b). On montre la première équivalence dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$) : On suppose que $\sup A = \ell$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\ell - (1/n) < \ell$ et ℓ est le plus petit majorant de A, $\ell - (1/n)$ n'est pas un majorant de A. Cela signifie que l'on peut trouver un $a_n \in A$ tel que $a_n > \ell - (1/n)$. Comme $a_n \in A$ et ℓ majore A, on a $a_n \leq \ell$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad \ell - \frac{1}{n} < a_n \leq \ell\,.$$

Comme la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, la suite $(\ell-(1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, d'après les opérations sur les limites (cf. proposition 3.41). Comme la suite constante égale à ℓ converge vers ℓ, on a, par le théorème des gendarmes (cf. le 5 de la proposition 3.43), $\lim a = \ell$. Enfin, ℓ est bien un majorant de A.

$\Longleftarrow$) : On suppose que ℓ est limite d'une suite $a : D \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de A et que ℓ majore A. On montre que ℓ est le plus petit majorant de A. Soit $m \in \mathbb{R}$ un majorant de A. Pour tout $n \in D$, $a_n \in A$ donc $a_n \leq m$. Comme a converge vers ℓ, on peut passer à la limite $n \to +\infty$ dans ces inégalités (cf. le 4 de la proposition 3.43). On obtient $\ell \leq m$. Donc ℓ est inférieur ou égal à tout majorant de A donc c'est le plus petit. D'où $\ell = \sup A$.

c). On montre la deuxième équivalence dans le cas $\ell = -\infty$.

$\Longrightarrow$) : On suppose que $\inf A = -\infty$. Par définition, cela signifie que A est non minorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n$ n'est pas un minorant de A donc il existe au moins un $a_n \in A$ tel que $a_n < -n$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. Comme $\lim_n n = +\infty$, on a, d'après les opérations sur les limites (cf. proposition 3.41), $\lim_n(-n) = -\infty$, et, d'après le théorème des gendarmes (cf. le 7 de la proposition 3.43), $\lim a = -\infty$. Enfin, $-\infty$ est bien un minorant de A.

$\Longleftarrow$) : On suppose que $-\infty$ est limite d'une suite a d'éléments de A. On montre que A est non minorée. Supposons que A soit minorée par $m \in \mathbb{R}$. Comme $]-\infty; m[$ est un voisinage de $-\infty$, il contient tous les termes de la suite a à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$. Un tel terme de a est strictement inférieur à m et, comme il est dans A, il est aussi supérieur ou égal à m. Contradiction. Donc A n'est pas minorée et $\inf A = -\infty$.

d). On montre la deuxième équivalence dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$.
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\inf A = \ell$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\ell + (1/n) > \ell$ et ℓ est le plus grand minorant de A, $\ell + (1/n)$ n'est pas un minorant de A. Cela signifie que l'on peut trouver un $a_n \in A$ tel que $a_n < \ell + (1/n)$. Comme $a_n \in A$ et ℓ minore A, on a $a_n \geq \ell$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \quad \ell + \frac{1}{n} > a_n \geq \ell .$$

Comme la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, la suite $(\ell+(1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, d'après les opérations sur les limites (cf. proposition 3.41). Comme la suite constante égale à ℓ converge vers ℓ, on a, par le théorème des gendarmes (cf. le 5 de la proposition 3.43), $\lim a = \ell$. Enfin, ℓ est bien un minorant de A.
$\Longleftarrow$) : On suppose que ℓ est limite d'une suite $a : D \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de A et que ℓ minore A. On montre que ℓ est le plus grand minorant de A. Soit $m \in \mathbb{R}$ un minorant de A. Pour tout $n \in D$, $a_n \in A$ donc $a_n \geq m$. Comme a converge vers ℓ, on peut passer à la limite $n \to +\infty$ dans ces inégalités (cf. le 4 de la proposition 3.43). On obtient $\ell \geq m$. Donc ℓ est supérieur ou égal à tout minorant de A donc c'est le plus grand. D'où $\ell = \inf A$. $\square$

Ce résultat permet de justifier aisément quelques calculs de bornes, dans le cas où ses bornes ne sont ni un maximum ni un minimum. Par exemple, on devine que $\inf]0; 1] = 0$. On voit que 0 minore l'ensemble $]0; 1]$. De plus, 0 est aussi la limite de la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui est une suite d'éléments de $]0; 1]$. Donc, par la proposition 3.45, on obtient $\inf]0; 1] = 0$.
Pour déterminer rigoureusement la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide et explicite de $\mathbb{R}$, on dispose donc, après avoir deviné ladite borne, de la proposition 3.45 lorsque ce n'est pas un maximum (resp. un minimum) et de la proposition 1.5 s'il s'agit d'un maximum (resp. un minimum).

On donne le résultat important suivant d'existence de limite pour les suites monotones.

Proposition 3.46. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle monotone. Alors $\lim u$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Plus précisément,*

1. *si u est croissante alors $\lim u = \sup u$, où $\sup u := \sup u(D) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$;*
2. *si u est décroissante alors $\lim u = \inf u$, où $\inf u := \inf u(D) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$.*

Preuve : On rappelle que $u(D)$ est la partie non vide $\{u_n; n \in D\}$ de $\mathbb{R}$.

a). Cas où u est croissante et $\sup u(D) = +\infty$. On montre que $\lim u = +\infty$ en utilisant (3.29).
Soit $L > 0$. Comme $\sup u(D) = +\infty$, il existe, par la proposition 3.45, une suite $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers $+\infty$. Le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$ contient donc tous les termes de a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} > L$ et, comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la croissance de u, $u_n \geq u_N = a_{n_0} > L$. On a montré que $\lim u = +\infty$.

b). Cas où u est décroissante et $\inf u(D) = -\infty$. On montre que $\lim u = -\infty$ en utilisant (3.30).
Soit $L > 0$. Comme $\inf u(D) = -\infty$, il existe, par la proposition 3.45, une suite $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers $-\infty$. Le voisinage $] - \infty; -L[$ de $-\infty$ contient donc tous les termes de a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} < -L$ et, comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la décroissance de u, $u_n \leq u_N = a_{n_0} < -L$. On a montré que $\lim u = -\infty$.

c). Cas où u est croissante et $\ell := \sup u(D) \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim u = \ell$ en utilisant (3.27).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \sup u(D)$, il existe, par la proposition 3.45, une suite réelle $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers ℓ. Le voisinage $I(\ell; \epsilon[$ de ℓ contient donc tous les termes de la suites a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} \in I(\ell; \epsilon[$ donc $\ell - \epsilon < a_{n_0} < \ell + \epsilon$ (d'après la proposition 2.7). Comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la croissance de u, $u_n \geq u_N = a_{n_0} > \ell - \epsilon$. Par définition de ℓ, on a aussi $u_n \leq \ell$. Donc $|u_n - \ell| < \epsilon$ (d'après la proposition 2.7). On a montré que $\lim u = \ell = \sup u(D)$.

d). Cas où u est décroissante et $\ell := \inf u(D) \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim u = \ell$ en utilisant (3.27).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \inf u(D)$, il existe, par la proposition 3.45, une suite réelle $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers ℓ. Le voisinage $I(\ell;\epsilon[$ de ℓ contient donc tous les termes de la suites a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} \in I(\ell;\epsilon[$ donc $\ell - \epsilon < a_{n_0} < \ell + \epsilon$ (d'après la proposition 2.7). Comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la décroissance de u, $u_n \leq u_N = a_{n_0} < \ell + \epsilon$. Par définition de ℓ, on a aussi $u_n \geq \ell$. Donc $|u_n - \ell| < \epsilon$ (d'après la proposition 2.7). On a montré que $\lim u = \ell = \inf u(D)$. □

On utilise parfois cette proposition 3.46 en conjonction avec la proposition 3.43. Par exemple, si l'on considère une suite croissante $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ alors la proposition 3.46 nous donne l'existence de la limite ℓ de u et, comme $u_n \geq u_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut passer à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 3.46) pour obtenir que $\ell \geq u_0$. En utilisant que $u_n \geq u_{2022}$ est vrai à partir d'un certain rang (par exemple le rang 2022), on obtient de même que $\ell \geq u_{2022}$.

On termine ce paragraphe par un autre résultat important qui concerne les suites réelles "adjacentes".

Définition 3.47. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et deux suites réelles $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que u et v sont adjacentes si u est croissante, v est décroissante,*

$$\forall n \in D\,, \quad u_n \leq v_n \tag{3.39}$$

et la suite $(u_n - v_n)_{n\in D}$ tend vers 0.

Théorème 3.48. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et deux suites réelles adjacentes $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors elles convergent vers la même limite, i.e. il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim u = \ell = \lim v$.*

Preuve : Soit $n_0 = \min D$ (cf. proposition 1.13). Pour $n \in D$, on a $u_n \leq v_{n_0}$ d'après (3.39) et la décroissance de v. On a aussi $u_{n_0} \leq v_n$ d'après (3.39) et la croissance de u. Donc u est majorée par v_{n_0} et v est minorée par u_{n_0}. Donc $\ell := \sup u$ et $\ell' = \inf v$ sont réels. De plus, par la proposition 3.23 et les monotonies de u et v, $\lim u$ existe et vaut ℓ et $\lim v$ existe et vaut ℓ'. Comme, pour tout $n \in D$, $u_n = (u_n - v_n) + v_n$, et comme la suite $(u_n - v_n)_{n\in D}$ tend vers 0, on a, par somme (cf. la proposition 3.41), $\ell = 0 + \ell' = \ell'$. □

3.7 Limite d'une suite et sous-suites.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au comportement des sous-suites d'une suite ayant une limite, finie ou infinie. On donne aussi le théorème de Bolzano-Weierstrass.

On vérifie d'abord qu'une extractrice, qui est une suite réelle, tend forcément vers $+\infty$. On traite d'abord le cas d'une extractrice définie sur $\mathbb{N}$.

Proposition 3.49. *Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une extractrice. Alors, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \varphi(n) \geq n\,. \tag{3.40}$$

En particulier, $\lim \varphi$ existe et vaut $+\infty$.

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (\varphi(n) \geq n)$. Comme φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et 0 est le minimum de $\mathbb{N}$, $\varphi(0) \geq 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Comme φ est strictement croissante et $n + 1 > n$, on a $\varphi(n + 1) > \varphi(n)$. Comme φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a donc $\varphi(n+1) \geq \varphi(n)+1$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\varphi(n+1) \geq \varphi(n)+1 \geq n+1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On

obtient donc (3.40).
Comme $\lim n = +\infty$, (3.40) et le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 3.43 avec $u = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x = \varphi$) montrent que $\lim \varphi$ existe et vaut $+\infty$. $\square$

On traite maintenant le cas général.

Proposition 3.50. *Soit D' une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $\varphi : D' \longrightarrow \mathbb{N}$ une extractrice. Alors* $\lim \varphi$ *existe et vaut* $+\infty$.

Preuve : Comme φ est une suite réelle croissante, $\lim \varphi$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et vaut $\sup \varphi(D')$, par la proposition 3.46. Montrons que $\sup \varphi(D') = +\infty$.
Supposons que $\varphi(D')$, qui est une partie de $\mathbb{N}$, soit finie. Alors, par la définition 1.11, il existe $p \in \mathbb{N}$ et des éléments $a_1; \cdots; a_p$ deux à deux distincts de $\mathbb{N}$ tel que $\varphi(D') = \{a_j; j \in [\![1;p]\!]\}$. Comme $\varphi : D' \longrightarrow \varphi(D')$ est bijective, on a, en notant par ψ sa bijection réciproque, $D' = \{\psi(a_j); j \in [\![1;p]\!]\}$. Donc D' est finie (cf. définition 1.11). Contradiction. On a donc montré que $\varphi(D')$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$. D'après le 3 de proposition 1.13, $\varphi(D')$ n'est pas majorée. Donc $\sup \varphi(D') = +\infty$. $\square$

Proposition 3.51. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On considère les deux situations :*

1. *On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on considère un $\ell \in \mathbb{C}$.*
2. *On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.*

Dans ces deux cas, on a l'équivalence suivante :

$$\big(\lim u \text{ existe et vaut } \ell\big) \iff \Big(\text{pour toute sous-suite } v \text{ de } u\,, \quad \big(\lim v \text{ existe et vaut } \ell\big)\Big)\,.$$

Preuve : On montre les deux implications.
$\Longleftarrow$) : On suppose que toute sous-suite de u tend vers ℓ. Or u est une sous-suite de u puisque $u = u \circ \mathrm{Id}_D$, où $\mathrm{Id}_D : D \longrightarrow D$ donnée par $\mathrm{Id}_D(n) = n$, et que Id_D est strictement croissante. Donc u tend vers ℓ.
$\Longrightarrow$) : On suppose que u tend vers ℓ. Soit D' une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$ une sous-suite de u. Il existe donc une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ telle que $v = u \circ \varphi$. Montrons que v tend vers ℓ en utilisant (3.21) avec u remplacée par v.
Cas où $D' = \mathbb{N}$: Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse (cf. (3.21)), V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_0. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N_0$, on a $v_n = u_{\varphi(n)}$ avec, d'après la proposition 3.49, $\varphi(n) \geq n \geq N_0$. Donc $v_n \in V$. On a montré que $\lim v = \ell$ via (3.27) ou (3.28).
Cas général : Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse (cf. (3.27) ou (3.28)), V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_0. Comme $[N_0; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ et comme $\lim \varphi = +\infty$ par la proposition 3.50, $[N_0; +\infty[$ contient tous les termes de φ à partir d'un certain rang $N_1 \in \mathbb{N}$. Soit $n \in D'$ avec $n \geq N_1$. On a donc $\varphi(n) \in [N_0; +\infty[$ soit $\varphi(n) \geq N_0$. Comme φ est à valeurs dans D et $v_n = u_{\varphi(n)}$, on a $v_n \in V$. On a montré que $\lim v = \ell$ via (3.21). $\square$

Une première application importante de cette proposition 3.51 consiste à utiliser l'implication "$\Longrightarrow$" de manière directe. Si l'on souhaite étudier une suite et qu'on vérifie qu'elle est une sous-suite d'une suite ayant une limite, cette implication nous donne tout de suite que la suite étudiée tend vers la limite de l'autre suite. Par exemple, la suite $w = ((2n+5)^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(1/p)_{p\in\mathbb{N}^*}$, qui converge vers 0, donc w converge aussi vers 0.
On peut aussi exploiter cette même implication "$\Longrightarrow$" de la proposition 3.51 dans un raisonnement par l'absurde. Pour montrer qu'une suite u n'a pas de limite, on suppose par l'absurde qu'elle en a une et on essaye de produire deux sous-suites v et w de u telles que, au choix :

— $\lim v$ et $\lim w$ existent mais sont différentes ;
— v ou w n'a pas de limite.

Voyons un exemple simple. On a déjà montré plus haut (cf. paragraphe 3.4.1) que la suite réelle $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. Redémontrons ce résultat en utilisant la stratégie que l'on vient d'esquisser. On suppose que $\lim x$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Les deux sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de x tendent aussi vers $\lim x$, d'après la proposition 3.51. La suite $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1$, donc cette suite converge vers 1. La suite $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -1, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n+1} = (-1)\cdot((-1)^2)^n = -1$, donc cette suite converge vers -1, qui est différent de 1. On a donc une contradiction avec le fait que ces suites doivent tendre vers la même limite. L'hypothèse "$\lim x$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty; +\infty\}$" est donc fausse et on a montré que x n'a pas de limite.

Grâce à cette proposition 3.51, combinée avec des résultats précédents, on peut montrer le résultat suivant sur les suites géométriques.

Proposition 3.52. *Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère les suites $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ données par, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n \;=\; z^n \quad \text{et} \quad s_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} z^k \,.$$

On a :

1. *Si $|z| < 1$ alors $\lim u$ existe et vaut 0 et $\lim s$ existe et vaut $(1-z)^{-1}$.*
2. *Si $|z| \geq 1$ et $z \notin \mathbb{R}^+$ alors $\lim u$ n'existe pas et $\lim s$ n'existe pas.*
3. *Si $z = x \in \mathbb{R}^+$ et $x > 1$ alors $\lim u$ et $\lim s$ existent et valent $+\infty$.*
4. *Si $z = 1$ alors $\lim u$ existe et vaut 1 et $\lim s$ existe et vaut $+\infty$.*

Preuve : Par la proposition 3.10, on a, pour $n \in \mathbb{N}$ et $z = 1$, $s_n = n+1$, et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \neq 1$,

$$s_n \;=\; \frac{1 - z^n}{1 - z} \;=\; \frac{z^n - 1}{z - 1}\,. \tag{3.41}$$

De plus, $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u (car $\mathbb{N} \ni n \mapsto n+1 \in \mathbb{N}$ est une extractrice), qui vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} \;=\; z \cdot u_n\,. \tag{3.42}$$

1. Prenons $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. La suite $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive. Elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$ (d'après les propositions 3.46 et 3.43). Comme $(|z|^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge aussi vers ℓ, par la proposition 3.51. On a
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad |z|^{n+1} \;=\; |z|\cdot|z|^n\,.$$
Par les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.41), on a donc $\ell = |z|\cdot\ell$ soit $(1-|z|)\ell = 0$. Comme $|z| < 1$, $\ell = 0$. Comme cette suite $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $|u|$, on obtient par (3.32) que $\lim u$ existe et vaut 0. Par (3.41) et les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.41), on obtient $\lim s = (1-z)^{-1}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geq 1$ et $z \notin \mathbb{R}^+$. On suppose que $\ell = \lim u$ existe.
<u>1er cas</u> : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Par (3.42) et les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.41), on obtient $\ell = z\cdot\ell$ soit $(1-z)\ell = 0$. Comme $z \notin \mathbb{R}^+$, $z \neq 1$ d'où $\ell = 0$. Par l'hypothèse et l'implication (3.33), $\lim |u| = |\ell| = 0$. Comme $|z| \geq 1$, $|u|$ est minorée par 1. Donc, par passage à la limite dans les inégalités, $|\ell| \geq 1$. Contradiction avec $\ell = 0$. Donc $\lim u$ n'existe pas.
Supposons que la limite de s existe dans $\mathbb{C}$. Par (3.41), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(z - 1)\cdot s_n + 1 \;=\; z^n\,.$$
Par la proposition 3.41, on aurait $\lim u$ existe et vaut $(z-1)(\lim s) + 1$. Contradiction car u n'a pas de limite. On a montré que s n'a pas de limite.
<u>2ième cas</u> : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $z = x \in \mathbb{R}^{-*}$ et $\ell \in (\mathbb{R}\cup\{-\infty; +\infty\})$. Si $\ell = +\infty$ alors, par (3.42) et les opérations sur les limites infinies (cf. proposition 3.44), on obtient $-\infty = +\infty$. Contradiction. Si $\ell = -\infty$, on obtient de même $+\infty = -\infty$. Contradiction. Donc $\ell \in \mathbb{R}$. Encore par (3.42) et les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.41), on obtient $\ell = x\cdot\ell$ soit $(1-x)\ell = 0$. Comme $x \neq 1$, $\ell = 0$. Par l'argument du cas précédent, on tombe aussi sur une contradiction. Donc $\lim u$

n'existe pas.
Supposons que la limite de s existe dans $(\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. Par (3.41), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(x - 1) \cdot s_n + 1 = x^n .$$

Par la proposition 3.44, on aurait $\lim u$ existe car $x \neq 1$. Contradiction car u n'a pas de limite. On a montré que s n'a pas de limite.

3. Prenons $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $x > 1$. Donc u est strictement croissante. Elle admet donc une limite $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$, par la proposition 3.46. Par (3.42) et les opérations sur les limites (cf. proposition 3.41 ou proposition 3.44), on a $\ell = x \cdot \ell$ avec $x > 1$. Nécessairement $\ell = +\infty$. Par (3.41) avec $z = x$ et les opérations sur les limites infinies (cf. proposition 3.44), on obtient $\lim s = +\infty$.
4. Prenons $z = 1$. u est alors la suite constante égale à 1 donc converge vers 1. s est une sous-suite de la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui tend vers $+\infty$, donc s tend aussi vers $+\infty$, par la proposition 3.51. $\square$

On a vu plus haut qu'une suite réelle convergente est forcément bornée (cf. le 3 de la proposition 3.43). Mais une suite réelle bornée n'est pas forcément convergente comme le montre le contre-exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est bien bornée mais n'a pas de limite (cf. paragraphe 3.4.1). Cependant, une suite réelle bornée admet toujours une sous-suite convergente, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.53. Théorème de Bolzano-Weierstrass. *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Autrement dit :*
Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle bornée. Alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$ telle que $u \circ \varphi$ soit convergente.

Pour démontrer ce résultat, on retrouve ici la difficulté signalée dans la remarque 3.3.
Pour préparer la preuve de ce théorème, on utilise un procédé de dichotomie pour construire des suites adjacentes vérifiant les propriétés du lemme suivant.

Lemme 3.54. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle bornée. Soit a un minorant de u et b un majorant de u. Il existe deux suites $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow [a; b]$ et $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow [a; b]$ adjacentes (i.e. α est croissante, β est décroissante, $\beta - \alpha$ est positive et tend vers 0) telles que $\alpha_0 = a$, $\beta_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble*

$$\big\{p \in D\,;\ u_p \in [\alpha_n\,;\,\beta_n]\big\}$$

est infini.

Preuve : On rappelle que, si B est une partie de $\mathbb{R}$, l'ensemble $u^{-1}(B)$ est la partie de D définie par

$$u^{-1}(B) \ :=\ \big\{n \in D\,;\ u_n \in B\big\} .$$

On a bien sûr $a \leq b$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante :
Il existe un unique couple $(a^{(n)}; b^{(n)})$ d'applications de $[\![0; n]\!] \longrightarrow [a; b]$ tel que $a^{(n)}(0) = a$, $b^{(n)}(0) = b$, $a^{(n)}$ est croissante, $b^{(n)}$ est décroissante, $b^{(n)} - a^{(n)}$ est positive, $b^{(n)}(n) - a^{(n)}(n) \leq 2^{-n}$, l'ensemble $u^{-1}([a^{(n)}(n); b^{(n)}(n)])$ est infini et tel que, pour $j \in [\![0; n[\![$, l'ensemble $u^{-1}([a^{(n)}(j); b^{(n)}(j)])$ est infini et

$$a^{(n)}(j+1) \ =\ a^{(n)}(j) \quad \text{et} \quad b^{(n)}(j+1) \ =\ \frac{a^{(n)}(j) + b^{(n)}(j)}{2} , \tag{3.43}$$

si l'ensemble $u^{-1}([a^{(n)}(j)\,;\,(a^{(n)}(j) + b^{(n)}(j))/2])$ est infini, et

$$a^{(n)}(j+1) \ =\ \frac{a^{(n)}(j) + b^{(n)}(j)}{2} \quad \text{et} \quad b^{(n)}(j+1) \ =\ b^{(n)}(j) , \tag{3.44}$$

sinon.
On note que $u^{-1}([a; b]) = D$ est infini et qu'au moins l'un des ensembles $u^{-1}([a; (a + b)/2])$ et $u^{-1}([(a +$

$b)/2;b])$ est infini, puisque leur réunion est D. Soit $a^{(1)} : [\![0;1]\!] \longrightarrow [a;b]$ et $b^{(1)} : [\![0;1]\!] \longrightarrow [a;b]$ définies par $a^{(1)}(0) = a$, $b^{(1)}(0) = b$ et par $a^{(1)}(1) = a$ et $b^{(1)}(0) = (a+b)/2$, si $u^{-1}([a;(a+b)/2])$ est infini, et $a^{(1)}(1) = (a+b)/2$ et $b^{(1)}(0) = b$, sinon. C'est l'unique couple d'applications de $[\![0;1]\!] \longrightarrow [a;b]$ qui vérifie les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(1)$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $u^{-1}([a^{(n)}(n)\,;\,b^{(n)}(n)])$ est infini, au moins l'un des ensembles

$$u^{-1}\Big(\big[a^{(n)}(n)\,;\,(a^{(n)}(n)+b^{(n)}(n))/2\big]\Big) \quad \text{et} \quad u^{-1}\Big(\big[(a^{(n)}(n)+b^{(n)}(n))/2\,;\,b^{(n)}(n)\big]\Big)$$

est infini. Soit $a^{(n+1)} : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow [a;b]$ et $b^{(n+1)} : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow [a;b]$ les applications dont la restriction à $[\![0;n]\!]$ est $a^{(n)}$ et $b^{(n)}$ respectivement (les applications données par $\mathcal{P}(n)$), et dont la valeur en $n+1$ est définie comme suit. Si l'ensemble $u^{-1}([a^{(n)}(n)\,;\,(a^{(n)}(n)+b^{(n)}(n))/2])$ est infini, on pose

$$a^{(n+1)}(n+1) \;=\; a^{(n)}(n) \quad \text{et} \quad b^{(n+1)}(n+1) \;=\; \frac{a^{(n)}(n)+b^{(n)}(n)}{2} \tag{3.45}$$

et, sinon, on pose

$$a^{(n+1)}(n+1) \;=\; \frac{a^{(n)}(n)+b^{(n)}(n)}{2} \quad \text{et} \quad b^{(n+1)}(n+1) \;=\; b^{(n)}(n)\,. \tag{3.46}$$

On vérifie que ces applications $a^{(n+1)}$ et $b^{(n+1)}$ satisfont les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n+1)$.
D'après l'hypothèse de récurrence, (3.45) et (3.46), $a^{(n+1)}(n+1) \geq a^{(n)}(n)$, $b^{(n+1)}(n+1) \leq b^{(n)}(n)$ et

$$0 \;\leq\; b^{(n+1)}(n+1) \;-\; a^{(n+1)}(n+1) \;\leq\; \frac{b^{(n)}(n) \;-\; a^{(n)}(n)}{2} \;\leq 2^{-(n+1)}\,.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $a^{(n+1)}$ est une application croissante, $b^{(n+1)}$ est une application décroissante et $b^{(n+1)} - a^{(n+1)}$ est positive. De plus, toujours par l'hypothèse de récurrence, $a^{(n+1)}(0) = a^{(n)}(0) = a$ et $b^{(n+1)}(0) = b^{(n)}(0) = b$.
Pour $j \in [\![0;n[\![$, (3.43) et (3.44) sont valables, selon le cas, par hypothèse de récurrence, et, comme $a^{(n+1)}$ prolonge $a^{(n)}$ et $b^{(n+1)}$ prolonge $b^{(n)}$, (3.43) et (3.44), avec $a^{(n)}$ remplacée par $a^{(n+1)}$ et $b^{(n)}$ remplacée par $b^{(n+1)}$, sont valables, selon le cas. De plus, $u^{-1}([a^{(n+1)}(j);b^{(n+1)}(j)])$ est infini.
D'après (3.45) et (3.46), (3.43) et (3.44), avec $a^{(n)}$ remplacée par $a^{(n+1)}$ et $b^{(n)}$ remplacée par $b^{(n+1)}$ et $j = n$, sont valables, selon le cas. De plus,

$$u^{-1}\Big(\big[a^{(n+1)}(n+1);b^{(n+1)}(n+1)\big]\Big) \;=\; u^{-1}\Big(\big[a^{(n)}(n)\,;\,(a^{(n)}(n)+b^{(n)}(n))/2\big]\Big)$$

et il est infini ou

$$u^{-1}\Big(\big[a^{(n+1)}(n+1);b^{(n+1)}(n+1)\big]\Big) \;=\; u^{-1}\Big(\big[(a^{(n)}(n)+b^{(n)}(n))/2\,;\,b^{(n)}(n)\big]\Big)\,,$$

et il est infini.
Si $A : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow [a;b]$ et $B : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow [a;b]$ vérifient les conditions imposées dans $\mathcal{P}(n+1)$ alors $A_{|[\![0;n]\!]}$ et $B_{|[\![0;n]\!]}$ vérifient les conditions imposées dans $\mathcal{P}(n)$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $A_{|[\![0;n]\!]} = a^{(n)} = a^{(n+1)}_{|[\![0;n]\!]}$ et $B_{|[\![0;n]\!]} = b^{(n)} = b^{(n+1)}_{|[\![0;n]\!]}$. De plus, A et B doivent vérifier (3.45) et (3.46), selon le cas, donc $A(n+1) = a^{(n+1)}(n+1)$ et $B(n+1) = b^{(n+1)}(n+1)$. D'où $A = a^{(n+1)}$ et $B = b^{(n+1)}$. On a montré $\mathcal{P}(n+1)$.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $m \geq n$, les restrictions à $[\![0;n]\!]$ des applications $a^{(m)}$ et $b^{(m)}$, fournies par $\mathcal{P}(m)$, vérifient les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n)$ donc ces restrictions sont respectivement $a^{(n)}$ et $b^{(n)}$, les applications fournies par $\mathcal{P}(n)$.
Soit $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ et $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = a^{(n)}(n) \in [a;b]$ et $\beta_n = b^{(n)}(n) \in [a;b]$, où $(a^{(n)};b^{(n)})$ est fournie par $\mathcal{P}(n)$. En particulier, $\alpha_0 = a$ et $\beta_0 = b$, par $\mathcal{P}(1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par $\mathcal{P}(n)$, $0 \leq \beta_n - \alpha_n \leq 2^{-n}$. Comme $a^{(n)}$ et $a^{(n+1)}$ coïncident en n et comme $b^{(n)}$ et $b^{(n+1)}$ coïncident en n, on a, d'après $\mathcal{P}(n+1)$,

$$\alpha_{n+1} \;=\; a^{(n+1)}(n+1) \;\geq\; a^{(n+1)}(n) \;=\; a^{(n)}(n) \;=\; \alpha_n$$

et
$$\beta_{n+1} \;=\; b^{(n+1)}(n+1) \;\leq\; b^{(n+1)}(n) \;=\; b^{(n)}(n) \;=\; \beta_n\,.$$
Donc α est croissante, β est décroissante et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta_n - \alpha_n \leq 2^{-n}$. Comme la suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (cf. proposition 3.52), $\beta - \alpha$ tend vers 0, par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.43). Les suites α et β sont donc adjacentes. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u^{-1}\big([\alpha_n\,;\,\beta_n]\big) \;=\; u^{-1}\Big(\big[a^{(n)}(n)\,;\,b^{(n)}(n)\big]\Big)$$
est infini, d'après $\mathcal{P}(n)$. □

Maintenant, on extrait une sous-suite appropriée vérifiant les conditions du lemme suivant.

Lemme 3.55. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle bornée. Soit a un minorant de u et b un majorant de u. Soit $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ et $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ deux suites vérifiant les conditions du lemme 3.54. Il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$ telle que*
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad \alpha_n \;\leq\; u_{\varphi(n)} \;\leq\; \beta_n\,. \tag{3.47}$$

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$ donnée par :
Il existe une unique application strictement croissante $\varphi^{(n)} : [\![0;n]\!] \longrightarrow D$ telle que $\varphi^{(n)}(0) = \min D$ et, pour $j \in [\![0;n[\![$,
$$\varphi^{(n)}(j+1) \;=\; \min\Big(u^{-1}\big([\alpha_{j+1};\beta_{j+1}]\big) \;\setminus\; \varphi^{(n)}\big([\![0;j]\!]\big)\Big)\,. \tag{3.48}$$
Soit $\varphi^{(1)} : [\![0;1]\!] \longrightarrow D$ définie par $\varphi^{(1)}(0) = \min D$ et
$$\varphi^{(1)}(1) \;=\; \min\Big(u^{-1}\big([\alpha_1;\beta_1]\big) \;\setminus\; \big\{\min D\big\}\Big)\,.$$
C'est la seule application de $[\![0;1]\!] \longrightarrow D$ vérifiant les conditions imposées dans $\mathcal{P}(1)$. On a vérifié que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi^{(n+1)} : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow D$ l'application dont la restriction à $[\![0;n]\!]$ est l'application $\varphi^{(n)}$ fournie par $\mathcal{P}(n)$ et dont la valeur en $n+1$ est donnée par
$$\varphi^{(n+1)}(n+1) \;=\; \min\Big(u^{-1}\big([\alpha_{n+1};\beta_{n+1}]\big) \;\setminus\; \varphi^{(n)}\big([\![0;n]\!]\big)\Big)\,. \tag{3.49}$$
Par l'hypothèse de récurrence, on a $\varphi^{(n+1)}(0) = \varphi^{(n)}(0) = \min D$. Pour $j \in [\![0;n[\![$, (3.48) est vraie d'après l'hypothèse de récurrence et, comme $\varphi^{(n+1)}$ et $\varphi^{(n)}$ coïncident sur $[\![0;n]\!]$, (3.48), avec $\varphi^{(n)}$ remplacée par $\varphi^{(n+1)}$, est aussi vraie.
Enfin, (3.49) donne la propriété (3.48), avec $\varphi^{(n)}$ remplacée par $\varphi^{(n+1)}$ et $j = n$, puique $\varphi^{(n+1)}$ et $\varphi^{(n)}$ coïncident sur $[\![0;n]\!]$. Donc $\varphi^{(n+1)}$ satisfait les conditions imposées par $\mathcal{P}(n+1)$.
Si $\sigma : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow D$ satisfait aussi ces dernières alors la restriction de σ à $[\![0;n]\!]$ satisfait celles imposées par $\mathcal{P}(n)$ donc $\sigma_{|[\![0;n]\!]} = \varphi^{(n)} = \varphi^{(n+1)}_{|[\![0;n]\!]}$. De plus,
$$\sigma(n+1) \;=\; \min\Big(u^{-1}\big([\alpha_{n+1};\beta_{n+1}]\big) \;\setminus\; \sigma\big([\![0;n]\!]\big)\Big) \;=\; \min\Big(u^{-1}\big([\alpha_{n+1};\beta_{n+1}]\big) \;\setminus\; \varphi^{(n)}\big([\![0;n]\!]\big)\Big)$$
qui vaut $\varphi^{(n+1)}(n+1)$ par (3.49). Donc $\sigma = \varphi^{(n+1)}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $m \geq n$, la restriction à $[\![0;n]\!]$ de l'application $\varphi^{(m)}$, fournie par $\mathcal{P}(m)$, vérifie les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n)$ donc $\varphi^{(m)}_{|[\![0;n]\!]} = \varphi^{(n)}$, l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$.
Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$ définie par $\varphi(0) = \min D$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = \varphi^{(n)}(n)$, où $\varphi^{(n)}$ est l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$. Pour $(m;n) \in \mathbb{N}$ avec $m > n$, on sait que $\varphi^{(m)}$ est strictement croissante, d'après $\mathcal{P}(m)$, donc $\varphi(m) = \varphi^{(m)}(m) > \varphi^{(m)}(n) = \varphi^{(n)}(n) = \varphi(n)$, puisque $\varphi^{(m)}$ coïncide avec $\varphi^{(n)}$ sur $[\![0;n]\!]$. Donc φ est strictement croissante. Comme elle est à valeurs dans $D \subset \mathbb{N}$, c'est une extractrice. De plus, pour

$n \in \mathbb{N}^*$, on a, d'après (3.48) avec $j = n - 1$, $\varphi(n) = \varphi^{(n)}(n) \in u^{-1}([\alpha_n; \beta_n])$ et $\varphi(0) = \min D \in D = u^{-1}([a; b]) = u^{-1}([\alpha_0; \beta_0])$. Cela démontre (3.47). □

Preuve du théorème 3.53 : On prend un majorant a de u et un minorant b de u. On applique successivement les lemmes 3.54 et 3.55. Par le théorème sur les suites adjacentes (cf. théorème 3.48), les suites α et β converge vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. D'après (3.47), le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.43) montre que $u \circ \varphi$ admet ℓ pour limite. Puisque φ est une extractrice, $u \circ \varphi$ est une sous-suite de la suite u et elle est convergente. □

3.8 Suites de Cauchy.

On donne ici les notions de suite de Cauchy et de complétude. On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3.56. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que u est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ si*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall (m; n) \in D^2\,, \quad \big((m \geq N) \text{ et } (n \geq N)\big) \implies |u_m - u_n| < \epsilon\,. \tag{3.50}$$

Lorsque D est de la forme $[\![n_0; +\infty[\![$, pour un $n_0 \in \mathbb{N}$, on peut donner une formulation équivalente à (3.50), formulation qui est utile dans la pratique.

Proposition 3.57. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. La proposition* (3.50) *est équivalente à*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall (n; p) \in D \times \mathbb{N}\,, \quad (n \geq N) \implies \big(\forall p \in \mathbb{N}\,, \quad |u_{n+p} - u_n| < \epsilon\big)\,.$$

Preuve : Appelons $\mathcal{Q}$ la nouvelle proposition.
(3.50) $\implies \mathcal{Q}$: On suppose (3.50) vraie. Soit $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\big((m \geq N) \text{ et } (n \geq N)\big) \implies |u_m - u_n| < \epsilon\,. \tag{3.51}$$

Soit $n \in D$ avec $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$. On a $n + p \geq n \geq N$. Comme $D = [\![n_0; +\infty[\![$, $n + p \in D$. Donc, par (3.51) avec $m = n + p$, on obtient $|u_{n+p} - u_n| < \epsilon$. On a montré $\mathcal{Q}$.
$\mathcal{Q} \implies$ (3.50) : On suppose $\mathcal{Q}$ vraie. Soit $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(n \geq N) \implies \big(\forall p \in \mathbb{N}\,, \quad |u_{n+p} - u_n| < \epsilon\big)\,. \tag{3.52}$$

Soit $(m; m') \in D^2$ avec $m \geq N$ et $m' \geq N$. Si $m \geq m'$, on peut écrire $m = m' + p$, pour un $p \in \mathbb{N}$, et, par (3.52) avec $n = m'$, on obtient $|u_m - u_{m'}| = |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$. Si $m < m'$, on peut écrire $m' = m + p$, pour un $p \in \mathbb{N}$, et, par (3.52) avec $n = m$, on obtient $|u_m - u_{m'}| = |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$. On a montré (3.50). □

Existe-t-il des suites de Cauchy ? Oui, il y a toutes les suites convergentes comme le montre la :

Proposition 3.58. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite convergente dans $\mathbb{K}$. Alors u est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$.*

Preuve : On suppose que $\ell = \lim u$ existe dans $\mathbb{K}$. On montre (3.50). Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \in D$ avec $p \geq N$, on ait $|u_p - \ell| < (\epsilon/2)$. Soit $(m; n) \in D^2$ avec $m \geq N$ et $n \geq N$. Par l'inégalité triangulaire et la propriété précédente, on a

$$|u_m - u_n| = \big|(u_m - \ell) - (u_n - \ell)\big| \leq |u_m - \ell| + |u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

On a montré (3.50) donc u est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. □

Concernant les suites de Cauchy réelles ou complexes, on a l'important résultat suivant :

Théorème 3.59. *Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ est convergente dans $\mathbb{K}$.*

Preuve : Admise. □

L'intérêt principal de ce théorème 3.59 se révèle dans la situation suivante : lorsqu'on étudie la limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et qu'on veut montrer qu'elle converge, on a, par la nature des définitions et résultats des paragraphes précédents, besoin de deviner la limite. Ce théorème 3.59 nous permet d'éviter cette contrainte car, pour l'appliquer, il suffit de montrer que la suite est de Cauchy, une notion qui ne fait pas apparaître la limite de la suite. Une bonne partie de l'étude des séries en L2 s'appuira sur cet avantage. Dans ce cours, on s'en servira pour justifier une définition de la fonction exponentielle (cf. paragraphe 9.4).

Depuis le début du cours, on aurait pu travailler avec $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et définir les notions de suite à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et de convergence dans $\mathbb{Q}$. Un bon nombre de résultats précédents (mais pas tous) seraient encore valables dans ce cas. Mais le théorème 3.59 est faux pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. C'est une des raisons pour lesquelles on travaille dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

4 Limites des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'objectif de cette partie est de construire une notion de limite pour des fonctions réelles à valeurs réelles ou complexes et d'étudier la notion de continuité qui lui est associée. À la différence des suites, pour lesquelles seule une limite à l'infini a un intérêt, d'autres situations pertinentes apparaissent : limite en un point du domaine de définition, limite au bord de ce domaine, limite à l'infini.

4.1 Propriétés des fonctions.

Comme pour l'étude des suites, on distingue des propriétés communes aux fonctions réelles et aux fonctions complexes d'autres propriétés qui sont propres aux fonctions réelles.

4.1.1 Propriétés générales des fonctions.

Avant tout, on précise les fonctions que l'on va étudier. On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Définition 4.1. *Une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, où $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une telle application est une fonction réelle. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, une telle application est une fonction complexe. On note par $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{K}$.*

Attention : La variable des fonctions considérées sera toujours réelle. Les valeurs sont toutes réelles pour une fonction réelle et toutes complexes pour une fonction complexe.
Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Si l'on change l'ensemble de départ ou l'ensemble d'arrivée sans changer “ce que fait la fonction”, on change tout de même de fonction. Dans le cas d'une modification de l'ensemble de départ, on changera le nom de la fonction. Dans le cas d'une modification de l'ensemble d'arrivée, on conservera souvent le nom de la fonction, ce qui constitue un abus de notation.
Pour que les fonctions soient bien définies, on doit veiller à ce que tout élément de l'ensemble de départ soit bien envoyé dans l'ensemble d'arrivée.

On s'intéressera surtout aux fonctions dont le domaine de définition est une partie infinie de $\mathbb{R}$ et, le plus souvent, contient un intervalle infini de $\mathbb{R}$.

Donnons quelques exemples de telles fonctions :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \quad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}.$$

Par abus, on confondra f_1 et f_2. f_3 est la restriction à $\mathbb{R}^*$ de f_1. D'autres exemples :

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x+ix^2 \end{array}.$$

Là encore, on confondra f_4 et f_5.

Comme pour les suites, on commence par définir des opérations sur l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui sont définies sur le même domaine de définition.

Définition 4.2. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*
On définit une nouvelle fonction $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $h(x) = f(x)+g(x)$. La fonction h est la somme des fonctions f et g et est notée $h = f + g$.
On définit une nouvelle fonction $k : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $k(x) = \lambda \cdot f(x)$. La fonction k est le produit de la fonction f par le scalaire λ et est notée λf ou $\lambda \cdot f$.
Pour $c \in \mathbb{K}$, la fonction $j : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, qui à tout $x \in \mathcal{D}$ associe $j(x) = c$ est appelée la fonction constante égale à c sur $\mathcal{D}$.
La fonction nulle sur D est la fonction constante égale à 0 sur $\mathcal{D}$.
Une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite constante (sur $\mathcal{D}$) s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = c$.

Attention : pour des raisons de clarté, on note de la même manière l'addition dans $\mathbb{K}$ et celle dans $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$, alors qu'elles sont différentes.

En considérant $f_7 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, donnée par $f_7(x) = x^2$, en plus des fonctions précédentes, on a $f_6 = f_2+if_7$.

Proposition 4.3. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ des fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire définies dans la définition 4.2, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Preuve : Grâce aux propriétés d'associativité et de commutativité de la loi $+$ dans $\mathbb{K}$ (cf. paragraphe 1.1), on en déduit ces même propriétés pour la loi $+$ de $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$. On voit que la fonction nulle sur $\mathcal{D}$ est l'élement neutre de la loi $+$ de $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$. Toute fonction $f \in \mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ admet comme fonction opposée la fonction $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par, pour $x \in \mathcal{D}$, $g(x) = -f(x)$. Comme on a, pour tout $(\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(a;b) \in \mathbb{K}^2$,

$$(\lambda\mu)a \;=\; \lambda\,(\mu a)\,,\; (\lambda\,+\,\mu)\,a \;=\; \lambda a\,+\,\mu a\,,\; \lambda\,(a\,+\,b) \;=\; \lambda a\,+\,\lambda b\,,\; 1\cdot a \;=\; a\,,$$

on obtient, pour tout $(\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(f;g) \in (\mathbb{K}^{\mathcal{D}})^2$,

$$(\lambda\mu)f \;=\; \lambda\,(\mu f)\,,\; (\lambda\,+\,\mu)\,f \;=\; \lambda f\,+\,\mu f\,,\; \lambda\,(f\,+\,g) \;=\; \lambda f\,+\,\lambda g\,,\; 1\cdot f \;=\; f\,.$$

On a montré que $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ muni des lois de la définition 4.2 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Remarque 4.4. *On peut montrer, en s'inspirant de la preuve de la proposition 3.17, que $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie, si $\mathcal{D}$ est un ensemble infini.*

Voyons maintenant d'autres opérations et propriétés sur les fonctions.

Définition 4.5. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$.*
Le produit de f par g est la fonction $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. On note h par fg ou $f \cdot g$.
Soit $\mathcal{D}_0$ une partie non vide de $\mathcal{D}$. La fonction $f_0 : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ qui, à $x \in \mathcal{D}_0$, associe $f(x)$, est la restriction de f à $\mathcal{D}_0$. On note $f_0 = f_{|\mathcal{D}_0}$.
Si $\mathcal{D}_1$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et si $h : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle dont l'image $h(\mathcal{D}_1)$ est incluse dans $\mathcal{D}$, alors la composition $f \circ h : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par, pour tout $x \in \mathcal{D}_1$, $(f \circ h)(x) = f(h(x))$.
Soit $|f| : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction réelle définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $(|f|)(x) = |f(x)|$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est le module de f et, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est la valeur absolue de f.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les fonctions réelles $\Re f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Im f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $\Re f(x) = \Re(f(x))$ et $\Im f(x) = \Im(f(x))$, respectivement, sont les parties réelle et imaginaire de la fonction complexe f.
On dit que $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 si l'on a l'équivalence : $(x \in \mathcal{D}) \iff (-x \in \mathcal{D})$.
On dit que f est (une fonction) paire si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $f(-x) = f(x)$.
On dit que f est (une fonction) impaire si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $f(-x) = -f(x)$.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la fonction module est l'application $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à un complexe z, associe son module $|z|$. Lorsque $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, le module de f, défini dans la définition 4.5, est en fait la composition $|\cdot| \circ f$ de la fonction module par f.
On a bien sûr la même chose dans $\mathbb{R}$, en remplaçant la fonction module par sa restriction à $\mathbb{R}$, à savoir la fonction valeur absolue. Pour une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, sa valeur absolue est le composition $|\cdot| \circ f$ de la fonction valeur absolue avec f.
En reprenant les exemples précédents, $f_1 = \Re(f_6)$ et $f_4 = \Im(f_6)$. On a aussi $f_4 = f_1 \cdot f_1 = f_1^2$. On remarque que f_2 est impaire, que f_5 est paire et que f_3 est impaire ($\mathbb{R}^*$, le domaine de définition de f_3, est bien symétrique par rapport à 0).

4.1.2 Propriétés propres aux fonctions réelles.

Dans ce paragraphe, on se concentre sur les fonctions réelles (i.e. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et on donne des propriétés reliées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Définition 4.6. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.*
On dit que f est croissante si

$$\forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \, , \, \Big((x \leq x') \implies (f(x) \leq f(x')) \Big) \, .$$

On dit que f est strictement croissante si

$$\forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \, , \, \Big((x < x') \implies (f(x) < f(x')) \Big) \, .$$

On dit que f est décroissante si

$$\forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \, , \, \Big((x \leq x') \implies (f(x) \geq f(x')) \Big) \, .$$

On dit que f est strictement décroissante si

$$\forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \, , \, \Big((x < x') \implies (f(x) > f(x')) \Big) \, .$$

On dit que f est monotone si elle est croissante ou bien si elle est décroissante.
On dit que f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou bien si elle est strictement décroissante.
Soit $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$. On dit que f est croissante (resp. strictement croissante, resp. décroissante,

resp. strictement décroissante, resp. monotone, resp. strictement monotone) sur $\mathcal{D}'$ si la restriction $f_{|\mathcal{D}'}$ de f à $\mathcal{D}'$ est croissante (resp. strictement croissante, resp. décroissante, resp. strictement décroissante, resp. monotone, resp. strictement monotone).

Donnons quelques exemples. Une fonction constante est croissante et aussi décroissante. Elle n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. La fonction Id : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, qui à x associe x, est strictement croissante. Elle est aussi croissante. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle n'est pas croissante (ni strictement croissante) puisque $-2 < -1$ et $f(-2) = 4 > 1 = f(-1)$. Elle n'est pas non plus décroissante (ni strictement décroissante) puisque $2 > 1$ et $f(2) = 4 > 1 = f(1)$.

Définition 4.7. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit $a \in \mathbb{R}$.*
On dit que f est majorée par a si a majore l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f, c'est-à-dire si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \le a$.
On dit que f est majorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que f soit majorée par b.
On dit que f est minorée par a si a minore l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f, c'est-à-dire si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \ge a$.
On dit que f est minorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que f soit minorée par b.
On dit que f est bornée si f est majorée et f est minorée.
Lorsqu'une fonction est minorée par 0, on dit qu'elle est positive.
Lorsqu'une fonction est majorée par 0, on dit qu'elle est négative.
La borne supérieure de f, notée $\sup f$ est $\sup f(\mathcal{D})$, la borne supérieure de l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f.
La borne supérieure de f, notée $\inf f$ est $\sup f(\mathcal{D})$, la borne supérieure de l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f.

Comme pour les suites, on donne une caractérisation de la bornitude en utilisant la valeur absolue.

Proposition 4.8. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On a l'équivalence :*

$$\Big((f \text{ est bornée}) \iff \big(\exists m \in \mathbb{R}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big|f(x)\big| \le m\big) \Big)\,.$$

Preuve : On montre successivement les deux implications.
$\Longrightarrow$) : On suppose f bornée. Par la définition 4.7, il existe donc $(m_-; m_+) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $m_- \le f(x) \le m_+$. Soit $m = \max(|m_-|; |m_+|)$. On a $m \ge |m_-| \ge -m_-$. On a aussi $m \ge |m_+| \ge m_+$. Soit $x \in \mathcal{D}$. On a $f(x) \le m_+ \le m$ et $-f(x) \le -m_- \le m$, donc $|f(x)| = \max(f(x); -f(x)) \le m$.
$\Longleftarrow$) : On suppose vrai le membre de droite de l'équivalence de l'énoncé. Il existe donc un $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $|f(x)| \le m$ soit $f(x) \in I(0; m]$. Par la proposition 2.7 avec $x_0 = 0$ et $r = m$, on a donc, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-m \le f(x) \le m$. Donc f est majorée par m et minorée par $-m$. Par la définition 4.7, elle est donc bornée. $\square$

4.2 Limites et continuité de fonction.

On introduit ici la notion de limite pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On commence par donner une définition générale abstraite. Ensuite, on donne une définition équivalente mais plus concrète dans les différents cas : limite finie en un point ; limite finie à l'infini ; limite infinie en un point ; limite infinie à l'infini. On introduit aussi la notion de continuité en un point du domaine de définition.

4.2.1 Définition générale.

Pour une fonction f d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$, on souhaite donner un sens précis à l'énoncé : “La fonction f tend vers une limite en un certain endroit”. La définition choisie devra respecter l'intuition

selon laquelle si f tend vers une limite quelque part, elle ne peut y avoir qu'une limite. Cette définition doit aussi refléter le comportement de f à l'endroit choisi.
Par exemple, il n'apparaît pas pertinent de parler de la limite de la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ en -1, puisque -1 est "loin" du domaine de définition de la fonction. Il s'agit donc de préciser où l'on va considérer une limite pour f.
C'est précisément dans ce but que l'on a introduit la notion de point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$ (cf. définition 2.9) et qu'on a indiqué quand $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à une partie de $\mathbb{R}$ (cf. définition 2.13). On va définir la notion de limite d'une fonction en un $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à son domaine de définition.
Quelles sont les limites possibles ? Comme pour les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, la limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ sera prise parmi les éléments de $\mathbb{K}$ et, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on permettra à $+\infty$ et à $-\infty$ d'être une telle limite. On utilise la notion de voisinage associée à de telles limites. Voir les définitions 2.2, 2.5 et 2.11. On renvoie aussi à la remarque 3.31 pour une compilation des principales propriétés de ces voisinages.
On utilise aussi la notion de voisinage associée aux endroits où l'on considère la limite d'une fonction. Lorsque $a \in \mathbb{R}$, voir la définition 2.5. Lorsque $a \in \{-\infty; +\infty\}$, voir la définition 2.11.

Remarque 4.9. *Soit $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. D'après les propositions 2.6 et 2.12, on sait que l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a et qu'une partie contenant un voisinage de a est aussi un voisinage de a. Si $a \in \mathbb{R}$, tout voisinage de a contient a. Si a est adhérent à une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et U est un voisinage de a, on voit, par les propositions 2.6 et 2.12, que a est aussi adhérent à $U \cap \mathcal{D}$.*

Définition 4.10. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On dit que ℓ est limite de f en a si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.1}$$

On remarque que la proposition

$$\forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) \in V)\big) \tag{4.2}$$

signifie $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$.

Si a n'est pas adhérent à $\mathcal{D}$, il existe un voisinage U de a tel que $U \cap \mathcal{D} = \emptyset$ et la proposition (4.2) est vraie quel que soit ℓ et quel que soit $V \in \mathcal{V}$ car le membre de gauche de l'implication est toujours faux. Dans ce cas, tout ℓ serait limite de f en a. Cela ne correspond pas à ce que l'on souhaite pour une limite, c'est pourquoi on a imposé que a soit adhérent à $\mathcal{D}$.
En revanche, si a est adhérent à $\mathcal{D}$, cela implique que, pour tout voisinage U de a, $U \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. En particulier, pour un tel voisinage U de a, on peut toujours trouver un $x \in \mathcal{D}$ qui vérifie aussi $x \in U$.

Proposition 4.11. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère $(\ell; \ell') \in \mathbb{C}^2$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère $(\ell; \ell') \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$. Si* (4.1) *est vraie et si* (4.1), *avec ℓ remplacée par ℓ', est vraie, alors $\ell = \ell'$.*

Preuve : On montre que $\ell = \ell'$ par l'absurde. Supposons $\ell \neq \ell'$. D'après la remarque 3.31, il existe $(A; B) \in \mathcal{V}_\ell \times \mathcal{V}_{\ell'}$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Comme ℓ est limite de f en a, il existe, d'après (4.1), $U_1 \in \mathcal{V}_a$ tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in A$. Comme ℓ' est limite de f en a, il existe, d'après (4.1) (avec ℓ remplacée par ℓ'), $U_2 \in \mathcal{V}_a$ tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in B$. Par la remarque 4.9, $U_1 \cap U_2$ est un voisinage de a. Comme a est adhérent à $\mathcal{D}$, $U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{D}$ est non vide. Pour $x \in U_1 \cap U_2 \in \mathcal{D}$, on a donc $f(x) \in A$, car $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, et $f(x) \in B$, car $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$. Donc $f(x) \in A \cap B$. Contradiction avec $A \cap B = \emptyset$. On a montré que $\ell = \ell'$. □

Cette proposition permet de parler de "la" limite d'une fonction, lorsqu'elle existe.

Définition 4.12. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. S'il existe ℓ tel que (4.1) est vraie, on dit que ℓ est la limite de f en a ou que f tend vers ℓ en a et on note*

$$\ell \ = \ \lim_a f \quad \text{ou} \quad \ell \ = \ \lim_{x \to a} f(x)\,.$$

Attention : Il est important de rappeler qu'une fonction peut ne pas avoir de limite en a. La proposition (4.1) peut être fausse pour toutes les limites envisageables. On verra des exemples plus loin. C'est pourquoi on ne parlera de la limite d'une fonction qu'après avoir démontré (ou supposé) son existence. “Étudier la limite d'une fonction” signifie donc de déterminer si elle existe et, éventuellement, de la calculer.

Que se passe-t-il lorsque $a \in \mathcal{D}$? Bien sûr, a est adhérent à $\mathcal{D}$. La limite en a peut ne pas exister. Si elle existe, en revanche, c'est forcément $f(a)$! C'est ce que l'on montre dans la proposition suivante :

Proposition 4.13. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$. Si la limite de f en a existe alors elle vaut $f(a)$.*

Preuve : Soit ℓ la limite de f en a. Comme $a \in \mathcal{D}$, $f(a)$ est défini dans $\mathbb{K}$. Supposons $f(a) \neq \ell$. Alors, par la remarque 3.31, il existe $A \in \mathcal{V}_{f(a)}$ et $B \in \mathcal{V}_\ell$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Par (4.1), il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset B$. Comme U est un voisinage de a, il contient a (cf. remarque 4.9). Comme $a \in \mathcal{D}$, $a \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(a) \in B$. Comme A est un voisinage de $f(a)$, A contient $f(a)$ (cf. remarque 3.31). Donc $f(a) \in A \cap B$. Contradiction avec $A \cap B = \emptyset$. L'hypothèse $f(a) \neq \ell$ est absurde, donc $f(a) = \ell$. $\square$

Définition 4.14. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$.*
Si la limite de f en a existe (dans ce cas, c'est $f(a)$), on dit que la fonction f est continue en a.
On dit que f est continue sur $\mathcal{D}'$ si f est continue en tout point de $\mathcal{D}'$, i.e. si, pour tout $a \in \mathcal{D}'$, f est continue en a, ou encore si, pour tout $a \in \mathcal{D}'$, $\lim_a f$ existe.
On dit que f est continue si elle est continue sur $\mathcal{D}$.

On donne maintenant une caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction. Ce résultat ressemble à la proposition 3.51 sur le lien entre la nature d'une suite et celle de ses sous-suites.

Proposition 4.15. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On a l'équivalence :*
(ℓ est limite de f en a)
si et seulement si
(pour toute suite $u : D \longrightarrow \mathcal{D}$ tendant vers a, la suite $f \circ u$ tend vers ℓ).

Preuve : Implicitement ci-dessus, D désigne une partie infinie de $\mathbb{N}$.
$\Longrightarrow$) : On suppose que ℓ est limite de f en a. Soit $u : D \longrightarrow \mathcal{D}$ une suite tendant vers a. On montre que la suite $f \circ u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ tend vers ℓ en utilisant (3.21) avec u remplacée par $f \circ u$.
Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1)). Comme u tend vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que U contient tous les termes de u à partir du rang N (cf. (3.21) avec ℓ remplacée par a). Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n \in U \cap \mathcal{D}$ et, comme $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$, on a donc $f(u_n) \in V$. On a montré que $\ell = \lim(f \circ u)$.
$\Longleftarrow$) : On montre la contraposée : (ℓ n'est pas limite de f en a) $\Longrightarrow$ (il existe une suite $u : D \longrightarrow \mathcal{D}$ qui tend vers a telle que ℓ n'est pas limite de $f \circ u$).
On suppose donc que ℓ n'est pas limite de f en a. En prenant la négation de (4.1), il existe un voisinage V de ℓ tel que

$$\forall U \in \mathcal{V}_a\,, \quad \exists\, x \in \big(U \cap \mathcal{D}\big)\,; \quad f(x) \notin V\,. \tag{4.3}$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère les différentes possibilités pour a.
Si $a \in \mathbb{R}$, $U_p := I(a; 1/p[$ est un voisinage de a.

Si $a = +\infty$, $U_p :=]p; +\infty[$ est un voisinage de $a = +\infty$.
Si $a = -\infty$, $U_p :=] - \infty; -p[$ est un voisinage de $a = -\infty$.
D'après (4.3), il existe $u_p \in U_p \cap \mathcal{D}$ tel que $f(u_p) \notin V$. On a ainsi construit une suite réelle $u = (u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathcal{D}$. On montre que u tend vers a.
<u>Cas où $a \in \mathbb{R}$</u> : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p \in U_p$ donc $|u_p - a| \leq (1/p)$. Comme $\lim_p (1/p) = 0$, on déduit du théorème des gendarmes (cf. proposition 3.40) que u converge vers a.
<u>Cas où $a = +\infty$</u> : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p \in U_p$ donc $u_p \geq p$. Comme $\lim_p p = +\infty$, on déduit du théorème des gendarmes (cf. proposition 3.43), que $\lim_p u_p = +\infty = a$.
<u>Cas où $a = -\infty$</u> : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p \in U_p$ donc $u_p \leq -p$. Comme $\lim_p p = +\infty$, on a, par les opérations sur les limites de suite (cf. proposition 3.44), $\lim_p (-p) = -\infty$. On déduit donc du théorème des gendarmes (cf. proposition 3.43), que $\lim_p u_p = -\infty = a$.
On montre maintenant que la suite $f \circ u$ ne tend pas vers ℓ, en montrant la négation de (3.21), c'est-à-dire

$$\exists\, V' \in \mathcal{V}_\ell\,; \quad \forall\, N \in \mathbb{N}\,, \quad \exists\, n \in \big(\mathbb{N}^* \cap [\![N; +\infty[\![\big)\,; \quad (f \circ u)_n \notin V'\,.$$

Pour le voisinage V de ℓ précédent, on a, pour $N \in \mathbb{N}$, $N+1 \in (\mathbb{N}^* \cap [\![N; +\infty[\![)$ et, d'après la construction de u, $(f \circ u)_{N+1} = f(u_{N+1}) \notin V$. On a montré que $f \circ u$ ne tend pas vers ℓ.
On a donc montré la contraposée annoncée. $\square$

Voyons un exemple simple d'application de ce résultat. Considérons la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On devine que f n'a pas de limite en 0 car "elle saute de -1 à 1". Montrons cela par l'absurde.
On suppose que $\ell = \lim_a f$ existe. Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n = 1/n$ et $v = -u$. On sait que u tend vers 0. Il en est de même pour v d'après les opérations sur les limites de suite (cf. proposition 3.41). Donc, par l'implication $\Longrightarrow$ de la proposition 4.15, $\lim(f \circ u) = \ell = \lim(f \circ v)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(f \circ u)(n) = f(u_n) = f(1/n) = 1$, car $1/n > 0$, et $(f \circ v)(n) = f(v_n) = f(-1/n) = -1$, car $-1/n < 0$. Les suites $(f \circ u)$ et $(f \circ v)$ sont constantes donc $-1 = \lim(f \circ v)$ et $1 = \lim(f \circ u)$. Contradiction car $-1 \neq 1$. On a bien montré que f n'a pas de limite en a.
On remarque que cet argument est proche de l'utilisation de sous-suites pour montrer qu'une suite n'a pas de limite, utilisation que l'on a illustrée dans le paragraphe 3.7.

Selon l'intuition, on s'attend à ce que l'on ne change pas la limite d'une fonction en a si l'on change la fonction "loin" de a. C'est ce que démontre la proposition suivante.

Proposition 4.16. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.*
Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ telles qu'il existe un voisinage U_0 de a sur lequel f et g coïncident, i.e. telles que

$$\exists\, U_0 \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in (U_0 \cap \mathcal{D})\,, \quad f(x) \;=\; g(x)\,.$$

Soit h la restriction de f à $U_0 \cap \mathcal{D}$. On a les équivalences

$$\Big(\ell \;=\; \lim_a f\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a h\Big) \tag{4.4}$$

et

$$\Big(\ell \;=\; \lim_a f\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a g\Big)\,. \tag{4.5}$$

Preuve : Par la remarque 4.9, a est adhérent à $U_0 \cap \mathcal{D}$.
a). On montre (4.4).
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\ell = \lim_a f$. On montre que $\ell = \lim_a h$ en utilisant (4.1) avec f remplacée par h. Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse, il existe un voisinage U_1 de a tel que $f(U_1 \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1)). Soit $U = U_1 \cap U_0$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Soit $x \in U \cap \mathcal{D}$. Comme

$U \cap \mathcal{D} \subset U_0 \cap \mathcal{D}$, $h(x) = f(x)$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D} \subset U_1 \cap \mathcal{D}$ et $f(U_1 \cap \mathcal{D}) \subset V$, on a $f(x) \in V$. D'où $h(x) = f(x) \in V$. On a montré $\ell = \lim_a h$.

$\Longleftarrow$) : On suppose que $\ell = \lim_a h$. On montre que $\ell = \lim_a f$ en utilisant (4.1). Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse, il existe un voisinage U_1 de a tel que $h(U_1 \cap (\mathcal{D} \cap U_0)) \subset V$ (cf. (4.1) avec f remplacée par h), puisque $\mathcal{D} \cap U_0$ est le domaine de définition de h. Soit $U = U_1 \cap U_0$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Soit $x \in U \cap \mathcal{D}$. Comme $U \cap \mathcal{D} \subset U_0 \cap \mathcal{D}$, $f(x) = h(x)$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D} \subset U_1 \cap (\mathcal{D} \cap U_0))$ et $h(U_1 \cap (\mathcal{D} \cap U_0)) \subset V$, on a $h(x) \in V$. Donc $f(x) = h(x) \in V$. On a montré $\ell = \lim_a f$.

b). On montre (4.5). On note que h est aussi la restriction à $\mathcal{D} \cap U_0$ de g. En appliquant (4.4) puis (4.4), avec f remplacée par g, on a

$$\Big(\ell \;=\; \lim_a f\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a h\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a g\Big) .$$

On a bien montré (4.5). □

On peut reformuler la définition 4.10 en utilisant la notion suivante :

Définition 4.17. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ dans le sens des définitions 2.9 et 2.13. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*
On dit que A est un voisinage de a dans $\mathcal{D}$ si A est la trace d'un voisinage réel de a sur $\mathcal{D}$, c'est-à-dire s'il existe un voisinage réel B de a tel que $A = B \cap \mathcal{D}$ ou encore si

$$\exists\, B \in \mathcal{V}_a\,; \quad A \;=\; B \cap \mathcal{D}\,.$$

On note par $\mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des voisinages dans $\mathcal{D}$ de a.

Pour ce type de voisinage, on a aussi les propriétés suivantes.

Proposition 4.18. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ dans le sens des définitions 2.9 et 2.13.*

1. *L'intersection de deux voisinages dans $\mathcal{D}$ de a est un voisinage dans $\mathcal{D}$ de a, i.e.*

$$\forall\, (A; B) \in (\mathcal{V}_a^{\mathcal{D}})^2\,, \quad A \,\cap\, B \;\in\; \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}\,.$$

2. *Une partie de $\mathcal{D}$ contenant un voisinage dans $\mathcal{D}$ de a est elle-même un voisinage dans $\mathcal{D}$ de a, i.e.*

$$\forall\, A \in \mathcal{P}(\mathcal{D})\,, \; \Big(\big(\exists\, B \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}\,;\; B \subset A\big) \implies A \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}\Big)\,.$$

Preuve : On peut suivre la preuve des propositions 2.3 et 2.12. □.

On obtient la reformulation suivante de la définition 4.10.

Proposition 4.19. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. La proposition* (4.1) *est équivalente à*

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists\, W \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \,\in\, W) \implies (f(x) \,\in\, V)\big) \tag{4.6}$$

et aussi à

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}\,. \tag{4.7}$$

Preuve : On montre successivement les implications (4.1) $\Longrightarrow$ (4.6) $\Longrightarrow$ (4.7) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.6) : On suppose (4.1) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$.

$W := U \cap \mathcal{D}$ est la trace sur $\mathcal{D}$ du voisinage U de a donc $W \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in W$, on a $f(x) \in V$ car $f(W) \subset V$. On a montré (4.6).
(4.6) $\Longrightarrow$ (4.7) : On suppose (4.6) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $W \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$ tel que $f(W) \subset V$. Donc $W \subset f^{-1}(V)$. Par le 2 de la proposition 4.18, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$. On a montré (4.7).
(4.7) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.7) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$. Donc il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f^{-1}(V) = U \cap \mathcal{D}$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D} = f^{-1}(V)$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). □

On remarque une similitude entre cette proposition 4.19 et la proposition 3.35 sur les limites de suite.

4.2.2 Limite en un point.

Dans ce paragraphe, on considère le cas où l'on regarde une limite en un point $a \in \mathbb{R}$. On va introduire des notions de limite à droite, de limite à gauche, et de limite épointée, en a. On donne aussi des formulations concrètes de la définition de ces limites.

Dans le paragraphe 4.2.1, on a vu que la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$, n'avait pas de limite en 0. Cependant, cette fonction est constante égale à 1 sur $]0; +\infty[$. On a envie de dire qu'elle tend vers 1 quand x tend vers 0 en restant strictement positif. À cet effet, on va introduire une notion de limite à droite en 0. C'est l'objet de la définition suivante.

Définition 4.20. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. On pose*

$$\mathcal{D}_{\neq a} \ := \ (\mathbb{R} \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D} \ , \quad \mathcal{D}_a^+ \ := \ ]a; +\infty[\cap \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_a^- \ := \ ]-\infty; a[\cap \mathcal{D} \, .$$

1. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$. Lorsque la restriction $f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}$ de f à $\mathcal{D}_{\neq a}$ admet une limite en a, on dit que cette limite est la limite épointée de f en a et on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) \ := \ \lim_{\neq a} f \ := \ \lim_a f_{|\mathcal{D}_{\neq a}} \, .$$

2. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$. Lorsque la restriction $f_{|\mathcal{D}_a^+}$ de f à $\mathcal{D}_a^+$ admet une limite en a, on dit que cette limite est la limite à droite de f en a et on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) \ := \ \lim_{x \to a^+} f(x) \ := \ \lim_{a^+} f \ := \ \lim_a f_{|\mathcal{D}_a^+} \, .$$

3. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$. Lorsque la restriction $f_{|\mathcal{D}_a^-}$ de f à $\mathcal{D}_a^-$ admet une limite en a, on dit que cette limite est la limite à gauche de f en a et on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) \ := \ \lim_{x \to a^-} f(x) \ := \ \lim_{a^-} f \ := \ \lim_a f_{|\mathcal{D}_a^-} \, .$$

4. *On suppose que $a \in \mathcal{D}$ et que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$. On dit que f est continue à droite en a si la limite à droite de f en a existe et vaut $f(a)$, i.e. si*

$$f(a) \ = \ \lim_{a^+} f \, .$$

5. *On suppose que $a \in \mathcal{D}$ et que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$. On dit que f est continue à gauche en a si la limite à gauche de f en a existe et vaut $f(a)$, i.e. si*

$$f(a) \ = \ \lim_{a^-} f \, .$$

Quelques commentaires s'imposent. Prenons $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et un réel a adhérent à $\mathcal{D}$. Tout d'abord, la limite en a d'une restriction de f est définie par la définition (4.10) avec

f remplacée par cette restriction et $\mathcal{D}$ remplacé par le domaine de définition de la restriction.
On remarque que a peut être adhérent à $\mathcal{D}$ sans être adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$. C'est le cas, par exemple, de $a = 0$ si $\mathcal{D} =]-2;-1] \cup \{0\} \cup [1;3[$.
On remarque que a peut être adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ sans être adhérent à $\mathcal{D}_a^+$. C'est le cas, par exemple, de $a = 0$ si $\mathcal{D} =]-\infty;0]$.
On a déjà expliqué au paragraphe 4.2.1 pourquoi on ne considère qu'une limite en un endroit a qui est adhérent au domaine de définition de la fonction considérée. Ceci explique l'hypothèse d'adhérence dans tous les points de la définition 4.20.
On note que si a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ (resp. $\mathcal{D}_a^-$), il est automatiquement adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ puisque $\mathcal{D}_a^+ \subset \mathcal{D}_{\neq a}$ (resp. $\mathcal{D}_a^- \subset \mathcal{D}_{\neq a}$). On note aussi que, si a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$, il est adhérent à $\mathcal{D}$ puisque $\mathcal{D}_{\neq a} \subset \mathcal{D}$.
Bien sûr, si $\mathcal{D}_{\neq a} = \mathcal{D}$, la limite épointée de f en a est la limite tout court de f en a, si cette dernière existe. C'est le cas pour la fonction $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \neq 0$ associe $1/x^2$ et $a = 0$. On verra plus loin $\lim\limits_{0} g$ est $+\infty$.
On a un phénomène similaire pour la limite à droite si $\mathcal{D}_a^+ = \mathcal{D}$ ou pour la limite à gauche si $\mathcal{D}_a^- = \mathcal{D}$. Ces notions de limites sont donc intéressantes dans les autres cas.
Revenons à l'exemple, considéré plus haut, de la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On sait que sa limite n'existe pas mais la fonction $f_{|]0;+\infty[}$, qui est constante égale à 1, a 1 pour limite en 0 (comme on le vérifiera plus loin). Il en est de même de $f_{|]-\infty;0[}$ qui tend elle vers -1 en 0. Comme $f(0) = 0 \notin \{-1;1\}$, f n'est ni continue à droite en 0 ni continue à gauche en 0. Il se trouve que la limite épointée de f en 0 n'existe pas (voir (4.8) ci-dessous).

Proposition 4.21. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à $\mathcal{D}$.*

1. *Soit $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$ telle que a soit adhérent à $\mathcal{D}'$. Si $\lim\limits_{a} f$ existe alors $\lim\limits_{a}(f_{|\mathcal{D}'})$ existe aussi et vaut $\lim\limits_{a} f$.*
2. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ et à $\mathcal{D}_a^-$ (il est donc adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$). On a l'équivalence suivante :*
$$\left(\lim_{\neq a} f \text{ existe}\right) \iff \left(\lim_{a^+} f \text{ et } \lim_{a^-} f \text{ existent et coïncident}\right). \tag{4.8}$$
Lorsqu'une des propositions précédentes est vraie, on a $\lim\limits_{\neq a} f = \lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f$.
3. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $a \notin \mathcal{D}$, on a l'équivalence*
$$\left(\lim_{a} f \text{ existe}\right) \iff \left(\lim_{\neq a} f \text{ existe}\right). \tag{4.9}$$
Lorsqu'une des propositions précédentes est vraie, on a $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{\neq a} f$.
4. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $a \in \mathcal{D}$, on a l'équivalence*
$$\left(\lim_{a} f \text{ existe}\right) \iff \left(\lim_{\neq a} f \text{ existe et vaut } f(a)\right). \tag{4.10}$$
Lorsqu'une des propositions précédentes est vraie, on a $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{\neq a} f = f(a)$.

Preuve : On remarque tout d'abord que l'on a $\mathcal{D}_{\neq a} = \mathcal{D}_a^- \cup \mathcal{D}_a^+$, que, si $a \notin \mathcal{D}$, on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\neq a}$, et que, si $a \in \mathcal{D}$, on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\neq a} \cup \{a\}$. On pose $f_a = f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}$, $f^+ = f_{|\mathcal{D}_a^+}$ et $f^- = f_{|\mathcal{D}_a^-}$. On remarque que $(f_a)_{|\mathcal{D}_a^+} = f^+$ et $(f_a)_{|\mathcal{D}_a^-} = f^-$.

1. Soit $\ell = \lim\limits_{a} f$. On montre que $\lim\limits_{a}(f_{|\mathcal{D}'}) = \ell$ en utilisant (4.1) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}'}$.
Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1)). Pour $x \in \mathcal{D}'$ avec $x \in U$, on a, comme $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f_{|\mathcal{D}'}(x) = f(x) \in V$. On a montré que $\lim\limits_{a}(f_{|\mathcal{D}'}) = \ell$.

2. On montre les deux implications de (4.8) et l'affirmation qui la suit.
   $\Longrightarrow$) : On suppose que $\ell = \lim_a f_a$ existe. On doit vérifier que $\lim_a f^+ = \ell = \lim_a f^-$.
   On applique le 1 avec f remplacée par f_a, $\mathcal{D}$ remplacé par $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $\mathcal{D}'$ remplacé par $\mathcal{D}_a^-$. On obtient $\lim_a f^-$ existe et vaut ℓ.
   On applique le 1 avec f remplacée par f_a, $\mathcal{D}$ remplacé par $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $\mathcal{D}'$ remplacé par $\mathcal{D}_a^+$. On obtient $\lim_a f^+$ existe et vaut ℓ.
   On a montré que $\lim_a f^-$ et $\lim_a f^+$ existent et valent ℓ.
   $\Longleftarrow$) : On suppose maintenant que $\lim_a f^+$ et $\lim_a f^-$ existent et sont égales. On appelle ℓ la valeur commune. On montre que $\lim_a f_a$ existe et vaut ℓ, en utilisant (4.1) avec f remplacée par f_a.
   Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage U^+ de a tel que $f^+(U^+ \cap \mathcal{D}_a^+) \subset V$ (cf. (4.1) pour f^+). Par hypothèse, il existe aussi un voisinage U^- de a tel que $f^-(U^- \cap \mathcal{D}_a^-) \subset V$ (cf. (4.1) pour f^-). Soit $U = U^+ \cap U^-$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Soit $x \in \mathcal{D}_{\neq a}$ avec $x \in U$. On a $x \neq a$. Si $x > a$, $x \in \mathcal{D}_a^+$ et, comme $U \subset U^+$, $x \in U^+$. Comme $x \in (U^+ \cap \mathcal{D}_a^+)$, $f(x) \in V$. Si $x < a$, $x \in \mathcal{D}_a^-$ et, comme $U \subset U^-$, $x \in U^-$. Comme $x \in (U^- \cap \mathcal{D}_a^-)$, $f(x) \in V$. On a montré que $\lim_a f_a = \ell$.
3. On suppose $a \notin \mathcal{D}$ donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\neq a}$ et $f = f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}$. On a donc (4.9) et égalité des limites en cas d'existence.
4. On prend $a \in \mathcal{D}$. On montre les deux implications de (4.10) et l'affirmation qui la suit.
   $\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim_a f$ existe. On sait qu'elle vaut $f(a)$ (cf. proposition 4.13). On applique le 1 avec $\mathcal{D}'$ remplacé par $\mathcal{D}_{\neq a}$. On obtient $\lim_{\neq a} f$ existe et vaut $f(a)$.
   $\Longleftarrow$) : On suppose que $\lim_a f_a$ existe et vaut $f(a)$. On doit vérifier que $\lim_a f$ existe et vaut $f(a)$. On utilise (4.1) avec ℓ remplacée par $f(a)$.
   Soit $V \in \mathcal{V}_{f(a)}$. Par hypothèse, il existe un voisinage U de a tel que $f_a(U \cap \mathcal{D}_{\neq a}) \subset V$ (cf. (4.1)). Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$. Si $x = a$ alors $f(x) = f(a) \in V$, car V est un voisinage de $f(a)$ (cf. remarque 3.31). Si $x \neq a$, $x \in \mathcal{D}_{\neq a}$. Comme $x \in U$, $x \in U \cap \mathcal{D}_{\neq a}$ donc $f(x) = f_a(x) \in V$. On a montré que $\lim_a f = f(a)$. $\square$

Maintenant, on va voir des reformulations équivalentes et plus maniables de la définition 4.10 lorsque $a \in \mathbb{R}$ mais en distinguant les cas où la limite est finie de ceux où la limite est infinie.

On commence par des reformulations équivalentes dans le cas d'une limite finie en un point. On a toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition 4.22. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. La proposition* (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.11}$$

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.12}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.13}$$

C'est surtout la proposition (4.12) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite.

Preuve de la proposition 4.22 : On montre successivement les implications (4.1) $\Longrightarrow$ (4.11) $\Longrightarrow$ (4.12) $\Longrightarrow$ (4.13) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.11) : On suppose (4.1) vraie. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $V := D(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et avec le voisinage $V := I(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in V$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.11).

(4.11) $\Longrightarrow$ (4.12) : On suppose (4.11) vraie. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Par définition des voisinages réels de a, il existe $\delta > 0$ tel que $I(a;\delta[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ tel que $|x-a| < \delta$, on a $x \in I(a;\delta[$, donc $x \in U$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.12).
(4.12) $\Longrightarrow$ (4.13) : On suppose (4.12) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$, on a $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$. Comme $|f(x) - \ell| < \epsilon$, $f(x) \in D(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f(x) \in I(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Donc $f(x) \in V$. On a montré (4.13).
(4.13) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.13) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$, on a $f(x) \in V$. Soit $U = I(a;\delta[$. C'est un voisinage réel de a. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $|x-a| < \delta$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). $\square$

Voyons quelques exemples de limites finies en un point. Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, un point $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $c \in \mathbb{K}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ la fonction constante égale à c sur $\mathcal{D}$. On s'attend à ce qu'elle tende vers c en a. Vérifions-le en utilisant (4.12) avec ℓ remplacée par c.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = 2022$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$, on a $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$. On a bien montré que $\lim_a f = c$.
En particulier, f est continue sur $\mathcal{D}$ (cf. définition 4.14).
Voyons un autre exemple. Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et un point $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $\mathrm{Id} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à $x \in \mathcal{D}$ associe $\mathrm{Id}(x) = x$. On devine que la limite de Id en a est a. Montrons-le en utilisant (4.12) avec ℓ remplacée par a.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = \epsilon > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$, on a $|\mathrm{Id}(x) - a| = |x-a| < \delta$ et, comme $\delta = \epsilon$, $|\mathrm{Id}(x) - a| < \epsilon$. On a bien montré que $\lim_a \mathrm{Id} = a$.
En particulier, la fonction Id est continue sur $\mathcal{D}$ (cf. définition 4.14).
Dans la preuve précédente, on aurait pu aussi prendre $\delta = (\epsilon/2)$, ou $\delta = (\epsilon/3)$ ou même n'importe quel nombre dans $]0;\epsilon]$.
Un exemple similaire est le suivant. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $t_b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $t_b(x) = x - b$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on devine que t_b tend vers $a - b$ en a. Montrons-le en utilisant (4.12) avec ℓ remplacée par $a - b$.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = \epsilon > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x-a| < \delta$, on a $|t_b(x) - (a-b)| = |x - b - (a-b)| = |x-a| < \delta$ et, comme $\delta = \epsilon$, $|t_b(x) - (a-b)| < \epsilon$. On a bien montré que $\lim_a t_b = a - b$. En particulier, la fonction t_b est continue sur $\mathbb{R}$ (cf. définition 4.14).
Revenons à l'exemple de la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On sait qu'elle n'a pas de limite en 0 (cf. paragraphe 4.2.1). On a affirmé plus haut qu'elle admet des limites à droite et à gauche en 0 qui sont différentes. Vérifions ce point. Plus précisément, montrons que $\lim_{0^+} f = 1$ et $\lim_{0^-} f = -1$.
Comme $f_{|\mathbb{R}^{+*}}$ est constante égale à 1 et comme $f_{|\mathbb{R}^{-*}}$ est constante égale à -1, on a le résultat cherché d'après le cas constant traité plus haut. En utilisant (4.8), on retrouve que $\lim_{\neq 0} f$ n'existe pas, puisque les limites à droite et à gauche sont différentes. Par (4.10), on retrouve aussi que $\lim_0 f$ n'existe pas.
Toujours pour cette fonction f, que se passe-t-il en un point $a \neq 0$? Si $a > 0$ alors f coïncide avec la fonction constante égale à 1 sur le voisinage $]a/2;+\infty[$ de a. De plus, cette fonction constante à une limite en a. Donc, par la proposition 4.16, $\lim_a f$ existe et vaut $\lim_{x\to a} 1 = 1$. Si maintenant $a < 0$, on obtient par le même raisonnement que $\lim_a f$ existe et vaut $\lim_{x\to a}(-1) = -1$. La fonction f est donc continue en tout point $a \in \mathbb{R}^*$.
Donnons un exemple de fonction complexe. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$fx) \;=\; \frac{2 \,+\, 3ix}{1+x^2}\,.$$

On devine que $\lim_0 f$ existe et vaut 2. On le montre en utilisant (4.12).
Tout d'abord, on remarque que, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) \,-\, 2| \;=\; \left|\frac{2 \,+\, 3ix \,-\, 2(1+x^2)}{1+x^2}\right| \;=\; \frac{|3ix \,-\, 2x^2|}{1+x^2} \;\leq\; |3ix \,-\, 2x^2|$$

car $1+x^2 \geq 1$. De plus, $|3ix - 2x^2| = |x| \cdot |3i - 2x| \leq |x|(3+2|x|)$.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ tel que $5\delta \leq \epsilon$ et $\delta \leq 1$. C'est possible puisque l'on peut prendre $\delta = \min(1;(\epsilon/5))$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < \delta$, on a, d'après le calcul précédent, $|f(x) - 2| \leq |x|(3+2|x|) < \delta(3+2\delta) \leq \delta \cdot 5 \leq \epsilon$. On a montré que $\lim_0 f = 2$.
Comme 0 est dans le domaine de définition de f et que la limite de f en zéro existe, f est continue en 0.

On reformule maintenant la définition des limites infinies en un point. On se place donc dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 4.23. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ et $a \in \mathbb{R}$, qui est un point adhérent à $\mathcal{D}$.*
Pour $\ell = +\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.14}$$

$$\forall L > 0\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.15}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{+\infty}\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.16}$$

Pour $\ell = -\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.17}$$

$$\forall L > 0\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.18}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{-\infty}\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.19}$$

C'est surtout les propositions (4.15) et (4.18) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite.

Preuve de la proposition 4.23 : On traite seulement le cas où $\ell = +\infty$. L'autre cas est similaire.
On montre successivement les implications : (4.1) $\implies$ (4.14) $\implies$ (4.15) $\implies$ (4.16) $\implies$ (4.1).
(4.1) $\implies$ (4.14) : On suppose (4.1) vraie (avec $\ell = +\infty$). Soit $L > 0$. Pour le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$, il existe, par hypothèse, un voisinage réel U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]L; +\infty[$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a donc $f(x) \in]L; +\infty[$ soit $f(x) > L$. On a montré (4.14).
(4.14) $\implies$ (4.15) : On suppose (4.14) vraie. Soit $L > 0$. Par hypothèse, il existe un voisinage réel U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L$. Comme U est un voisinage réel de a, il existe $\delta > 0$ tel que $I(a; \delta[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, $x \in I(a; \delta[$ donc $x \in U$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > L$. On a montré (4.15).
(4.15) $\implies$ (4.16) : On suppose (4.15) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Il existe donc $L > 0$ tel que $]L; +\infty[\subset V$. Par hypothèse pour ce L, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on ait $f(x) > L$. Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$. On a $f(x) > L$ donc $f(x) \in]L; +\infty[\subset V$ soit $f(x) \in V$. On a montré (4.16).
(4.16) $\implies$ (4.1) : On suppose (4.16) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par hypothèse, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U = I(a; \delta[$. C'est un voisinage réel de a. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $|x - a| < \delta$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). □

Étudions deux exemples. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x > 0$ associe $f(x) = 1/x$. On remarque que 0 est bien adhérent à $\mathbb{R}^{+*}$. Montrons que $\lim_0 f$ existe et vaut $+\infty$, en utilisant (4.15).
Soit $L > 0$. On choisit $\delta = 1/L > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ avec $|x| < \delta$, on a $0 < x < 1/L$ donc $f(x) = 1/x > L$. On a montré (4.15).
Soit $h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui $x \neq 0$ associe $h(x) = 1/x$. On devine que h n'a pas de limite en 0 car ses limites à droite et à gauche existent mais sont différentes. Montrons cela.
La restriction de h à $\mathbb{R}^* \cap]0; +\infty[$ est f et $\lim_0 f = +\infty$. Donc $\lim_{0^+} h$ existe et vaut $+\infty$.
Appelons g la restriction de h à $\mathbb{R}^* \cap] - \infty; 0[= \mathbb{R}^{-*}$. Montrons que $\lim_0 g$ existe et vaut $-\infty$, en utilisant (4.18) avec f remplacée par g.

Soit $L > 0$. On choisit $\delta = 1/L > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^{-*}$ avec $|x| < \delta$, on a $-1/L < x < 0$ donc $1/(-Lx) > 1$ et donc $g(x) = 1/x < -L$. On a montré (4.18).
Ainsi $\lim\limits_{0^-} h$ existe et vaut $-\infty \neq +\infty$. Donc h n'a pas de limite en 0 par (4.8) (avec f remplacée par h).

4.2.3 Prolongement par continuité.

On reste dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 4.24. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathcal{D})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ tel que $\ell = \lim\limits_{a} f$ existe dans $\mathbb{K}$. L'application $\hat{f} : \mathcal{D} \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\hat{f}(x) = f(x)$, si $x \in \mathcal{D}$, et $\hat{f}(a) = \ell$, est appelé prolongement par continuité de f en a.*

Remarquons que, dans le cadre de cette définition 4.24, le prolongement $\hat{f}$ de f en a est automatiquement continue en a. En effet, la limite $\lim\limits_{\neq a} \hat{f}$ existe et vaut $\lim\limits_{a} f$, puisque $(\mathcal{D} \cup \{a\})_{\neq a} = \mathcal{D}$ et $(\hat{f})_{|\mathcal{D}} = f$. De plus, comme $\hat{f}(a) = \ell = \lim\limits_{\neq a} \hat{f}$, la limite de $\hat{f}$ en a existe, par (4.10) avec f remplacée par $\hat{f}$. D'après la définition 4.14, $\hat{f}$ est continue en a.
Voyons des exemples et un contre-exemple. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x/|x|$. Peut-on la prolonger par continuité en 0 ? On étudie sa limite en 0. On remarque que la restriction de f à $\mathbb{R}^{+*}$ est constante égale à 1 donc elle tend vers 1 en 0. Donc $\lim\limits_{0^+} f$ existe et vaut 1. Comme la restriction de f à $\mathbb{R}^{-*}$ est constante égale à -1 donc elle tend vers -1 en 0. Donc $\lim\limits_{0^-} f$ existe et vaut -1. Comme $\lim\limits_{0^+} f \neq \lim\limits_{0^-} f$, f n'a pas de limite en 0. Elle ne peut donc pas être prolongée par continuité en 0.
En revanche, on peut prolonger par continuité en 0 la restriction f^+ de f à $\mathbb{R}^{+*}$. La limite de f^+ en 0 est en fait la limite à droite de f en 0, qui est $1 \in \mathbb{R}$. Donc f^+ admet un prolongement par continuité en 0 qui est la fonction $\widehat{f^+} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \geq 0$, $\widehat{f^+}(x) = 1$.
On peut aussi prolonger par continuité en 0 la restriction f^- de f à $\mathbb{R}^{-*}$, puisque f^- a pour limite $-1 \in \mathbb{R}$ en 0. Son prolongement par continuité en 0 est la fonction $\widehat{f^-} : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \geq 0$, $\widehat{f^-}(x) = -1$.
Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \neq 0$, $g(x) = x^2/x$. Pour $x \neq 0$, on a $g(x) = x$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} x = 0$, par le 3 de la proposition 4.21, donc $\lim\limits_{0} g$ existe et vaut 0. Le prolongement par continuité de g en 0 est donc l'application $\hat{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\hat{g}(x) = g(x) = x^2/x = x$, si $x \neq 0$, et $\hat{g}(0) = 0$. Donc $\hat{g} = \mathrm{Id}$.

4.2.4 Limite à l'infini.

On reprend ici la démarche suivie dans le paragraphe 4.2.2 précédent mais pour $a \in \{-\infty; +\infty\}$. Comme il n'y a pas lieu d'introduire des limites à gauche ou à droite dans ce cas, on se concentre sur des reformulations concrètes des limites.

On commence par les limites finies. On a donc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 4.25. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \{-\infty; +\infty\}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \mathbb{K}$.*
Pour $a = +\infty$, la proposition (4.1) est équivalente aux propositions suivantes :

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{+\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.20}$$

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.21}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.22}$$

Pour $a = -\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{-\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.23}$$

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.24}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.25}$$

C'est surtout les propositions (4.21) et (4.24) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite. Donnons un exemple. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. On devine que sa limite en $+\infty$ existe et vaut 0. Vérifions-le avec (4.21).
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $A = 1/\epsilon$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ avec $x > A$, on a $f(x) = 1/x < 1/A = \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{x\to+\infty}(1/x) = 0$.

Preuve de la proposition 4.25 : On traite seulement le cas où $a = +\infty$. L'autre cas est similaire.
On montre successivement les implications : (4.1) $\implies$ (4.20) $\implies$ (4.21) $\implies$ (4.22) $\implies$ (4.1).
(4.1) $\implies$ (4.20) : On suppose (4.1) vraie. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $V := D(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et avec le voisinage $V := I(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe $U \in \mathcal{V}_{+\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in V$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.20).
(4.20) $\implies$ (4.21) : On suppose (4.20) vraie. Soit $\epsilon > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $+\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]A;+\infty[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, $x \in]A;+\infty[\subset U$ donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.21).
(4.21) $\implies$ (4.22) : On suppose (4.21) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse pour cet ϵ, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$ soit $f(x) \in D(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f(x) \in I(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On a montré (4.22).
(4.22) $\implies$ (4.1) : On suppose (4.22) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]A;+\infty[$. C'est un voisinage de $+\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x > A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). □

On traite les limites infinies. On prend donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 4.26. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \{-\infty;+\infty\}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \{-\infty;+\infty\}$.*
Pour $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{+\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.26}$$

$$\forall L > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.27}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{+\infty}\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.28}$$

Pour $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{+\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.29}$$

$$\forall L > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.30}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{-\infty}\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.31}$$

Pour $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{-\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.32}$$

$$\forall L > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.33}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{+\infty}, \quad \exists A > 0 ; \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) \in V)\big) . \tag{4.34}$$

Pour $a = -\infty$ et $\ell = -\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{-\infty} ; \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) < -L)\big) , \tag{4.35}$$

$$\forall L > 0, \quad \exists A > 0 ; \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) < -L)\big) , \tag{4.36}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{-\infty}, \quad \exists A > 0 ; \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) \in V)\big) . \tag{4.37}$$

C'est surtout les propositions (4.27), (4.30), (4.33) et (4.36) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite.

Preuve de la proposition 4.26 : On traite seulement le cas où $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$. Les autres cas sont similaires.
On montre successivement les implications : (4.1) $\implies$ (4.29) $\implies$ (4.30) $\implies$ (4.31) $\implies$ (4.1).
(4.1) $\implies$ (4.29) : On suppose (4.1) vraie. Soit $L > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $V :=]-\infty; -L[$ de $-\infty$, il existe $U \in \mathcal{V}_{+\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in V$, c'est-à-dire $f(x) < -L$. On a montré (4.29).
(4.29) $\implies$ (4.30) : On suppose (4.29) vraie. Soit $L > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $+\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, $x \in]A; +\infty[\subset U$ donc $f(x) < -L$. On a montré (4.30).
(4.30) $\implies$ (4.31) : On suppose (4.30) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Par définition des voisinages de $-\infty$, il existe $L > 0$ tel que $]-\infty; -L[\subset V$. Par hypothèse pour cet L, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) < -L$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a donc $f(x) < -L$ soit $f(x) \in]-\infty; -L[\subset V$. On a montré (4.31).
(4.31) $\implies$ (4.1) : On suppose (4.31) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]A; +\infty[$. C'est un voisinage de $+\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x > A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). $\square$

On traite quelques exemples. On reprend la fonction $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\mathrm{Id}(x) = x$. $-\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}$. On devine que la limite $\lim_{-\infty} \mathrm{Id}$ existe et vaut $-\infty$. On le montre en utilisant (4.36).
Soit $L > 0$. On choisit $A = L > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x < -A$, on a $\mathrm{Id}(x) = x < -A = -L$. On a montré (4.36) et donc que $\lim_{-\infty} \mathrm{Id} = -\infty$.
Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -x^2$. On devine qu'elle a $-\infty$ pour limite en $+\infty$. On le montre en utilisant (4.30).
Soit $L > 0$. On choisit $A = \sqrt{L} > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x > A$, on a $x^2 > A^2$ donc $g(x) = -x^2 < -A^2 = -L$. On a montré (4.30).

4.3 Opérations sur les limites de fonctions.

Comme pour les limites de suites, on va voir que des opérations de base sur les fonctions se transmettent aux limites de fonctions. On commence par des propriétés générales puis on considère séparément les cas de limites finies et de limites infinies.

4.3.1 Composition.

On se place dans le cas général où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Étant donnée une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, on peut la composer à droite par une fonction réelle $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$. Que peut-on dire des limites de $f \circ g$ à partir de celles de f et g ?

Proposition 4.27. *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soit $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}'$ et tel que $\ell' := \lim_a g$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Alors ℓ' est adhérent à $\mathcal{D}$. On suppose, de plus, que $\ell := \lim_{\ell'} f$ existe. Alors $\lim_a (f \circ g)$ existe et vaut ℓ, i.e.*

$$\lim_a (f \circ g) \;=\; \lim_{\left(\lim_a g\right)} f \,.$$

Preuve : Vérifions d'abord que ℓ' est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $W \in \mathcal{V}_{\ell'}$. Comme ℓ' est la limite de g en a, il existe un voisinage U de a tel que $g(U \cap \mathcal{D}') \subset W$. Soit $x \in U \cap \mathcal{D}'$ (qui est non vide car a est adhérent à $\mathcal{D}'$). On a donc $g(x) \in W$ et aussi $g(x) \in \mathcal{D}$. Donc $(W \cap \mathcal{D}) \neq \emptyset$. Ceci étant vrai pour tout voisinage W de ℓ', ℓ' est adhérent à $\mathcal{D}$.
On montre que la limite en a de $f \circ g$ existe et vaut ℓ en utilisant (4.1) avec f remplacée par $f \circ g$.
Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Comme ℓ est la limite de f en ℓ', il existe un voisinage W de ℓ' tel que $f(W \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1) avec a remplacé par ℓ'). Comme ℓ' est la limite de g en a, il existe un voisinage U de a tel $g(U \cap \mathcal{D}') \subset W$ (cf. (4.1) avec f remplacée par g et ℓ remplacée par ℓ'). Pour $x \in \mathcal{D}'$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}'$ donc $g(x) \in W$. Comme g est à valeurs dans $\mathcal{D}$, $g(x) \in \mathcal{D}$. Donc $g(x) \in W \cap \mathcal{D}$. D'où $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \in V$. On a montré que $\lim_a (f \circ g) = \ell$. $\square$

On a vu dans le paragraphe 4.2.2 que les translations t_b (pour $b \in \mathbb{R}$) sont continues en tout point de $\mathbb{R}$. Ceci permet d'obtenir le corollaire suivant pour les limites en un point de $\mathbb{R}$.

Corollaire 4.28. *Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{R}$*
On suppose que a est un point adhérent à $\mathcal{D}$ et que $\ell = \lim_a f$ existe. Alors 0 est un point adhérent au domaine de définition de $f \circ t_{-a}$ et ℓ est aussi la limite en 0 de cette fonction $f \circ t_{-a}$, i.e.

$$\lim_{x \to a} f(x) \;=\; \lim_a f \;=\; \lim_0 (f \circ t_{-a}) \;=\; \lim_{h \to 0} f(a+h)\,.$$

Réciproquement, si 0 est un point adhérent au domaine de définition de $f \circ t_{-a}$ et si la limite en 0 de $f \circ t_{-a}$ existe alors a est un point adhérent à $\mathcal{D}$, la limite en a de f existe et les deux limites sont égales.

Preuve : On remarque tout d'abord que la restriction de t_a à $\mathcal{D}$ est bijective de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}_a := t_a(\mathcal{D})$. De plus, sa bijection réciproque est la restriction à $\mathcal{D}_a$ de t_{-a}. On note que $f \circ t_{-a}$ est définie sur $\mathcal{D}_a$.

a). On suppose que a est un point adhérent à $\mathcal{D}$ et que $\ell := \lim_a f$ existe. Comme t_a est continue en a, sa limite en a est $t_a(a) = 0$. Il en est de même de la restriction de t_a à $\mathcal{D}$, d'après le 1 de la proposition 4.21, et 0 est un point adhérent à $t_a(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_a$, d'après la proposition 4.27. Comme t_{-a} est continue en 0, sa limite en 0 est $t_{-a}(0) = a$. Il en est de même de la restriction de t_{-a} à $\mathcal{D}_a$, d'après le 1 de la proposition 4.21. Par la proposition 4.27 avec g remplacée par la restriction de t_{-a} à $\mathcal{D}_a$, a remplacé par 0 et ℓ' remplacée par a, la limite en 0 de $f \circ t_{-a}$ existe et vaut ℓ.

b). On suppose 0 est un point adhérent à $\mathcal{D}_a$ et que $\ell := \lim_0 (f \circ t_{-a})$ existe. Comme t_{-a} est continue en 0, sa limite en 0 est $t_{-a}(0) = a$. Il en est de même de la restriction de t_{-a} à $\mathcal{D}_a$, d'après le 1 de la proposition 4.21, et a est adhérent à $t_{-a}(\mathcal{D}_a) = \mathcal{D}$, d'après la proposition 4.27. Comme t_a est continue en a, sa limite en a est $t_a(a) = 0$. Il en est de même de la restriction de t_a à $\mathcal{D}$, d'après le 1 de la proposition 4.21. Par la proposition 4.27 avec f remplacée par $f \circ t_{-a}$, g remplacée par t_a, et ℓ' remplacée par 0, la limite en a de $(f \circ t_{-a}) \circ t_a$ existe et vaut ℓ. Comme $(f \circ t_{-a}) \circ t_a = f \circ (t_{-a} \circ t_a) = f$, on en déduit que la limite en a de f existe et vaut ℓ. $\square$

Concernant la continuité, on a le corollaire suivant.

Corollaire 4.29. *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soit $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$. On suppose que g est continue sur une partie $\mathcal{D}'_0$ de $\mathcal{D}'$, que f est continue sur une partie $\mathcal{D}_0$ de $\mathcal{D}$ et que $g(\mathcal{D}'_0) \subset \mathcal{D}_0$. Alors $f \circ g$ est continue sur $\mathcal{D}'_0$.*

Preuve : Soit $a \in \mathcal{D}_0'$. Par l'hypothèse sur g, g est continue en a. Comme $g(\mathcal{D}_0') \subset \mathcal{D}_0$ et $a \in \mathcal{D}_0'$, $g(a) \in \mathcal{D}_0$. De plus $\lim\limits_a g = g(a) \in \mathbb{R}$ (cf. proposition 4.13). Par l'hypothèse sur f, f est continue en $g(a)$. Donc $\lim\limits_{g(a)} f$ existe. Par la proposition 4.27, $\lim\limits_a (f \circ g)$ existe donc $f \circ g$ est continue en a. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathcal{D}_0'$, $f \circ g$ est continue sur $\mathcal{D}_0'$. □

4.3.2 Propriétés générales des limites de fonction.

On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Remarque 4.30. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. D'après les propositions 4.22 et 4.25,* $(\lim_a f = \ell)$ *est équivalente à*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,. \tag{4.38}$$

Proposition 4.31. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $(\lambda; \ell; \ell') \in \mathbb{K}^3$.*

1. *Théorème des gendarmes. On suppose qu'il existe une fonction $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en a et un voisinage U de a tels que*
$$\forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies \big(|f(x) - \ell| \leq h(x)\big)\,. \tag{4.39}$$
Alors $\lim\limits_a f$ existe et vaut ℓ.
2. *Propriétés du module (ou de la valeur absolue).*
$$\big(\lim_a f = \ell\big) \iff \big(\lim_a |f - \ell| = 0\big)\,. \tag{4.40}$$
En particulier, quand $\ell = 0$, on a
$$\big(\lim_a f = 0\big) \iff \big(\lim_a |f| = 0\big)\,. \tag{4.41}$$
De plus, on a
$$\big(\lim_a f = \ell\big) \implies \big(\lim_a |f| = |\ell|\big)\,. \tag{4.42}$$
3. *On suppose que $\lim\limits_a f = \ell$ et $\lim\limits_a g = \ell'$. Alors les limites suivantes existent et on a*
$$\lim_a (f+g) = \ell + \ell'\,, \quad \lim_a (\lambda f) = \lambda \cdot \ell\,, \quad \lim_a (fg) = \ell \cdot \ell'\,.$$
Si, de plus, $\ell \neq 0$, alors il existe un voisinage U de a tel que la fonction $1/f$ soit définie sur $U \cap \mathcal{D}$ et on a
$$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}\,.$$
4. *On suppose que $a \in \mathcal{D}$ et que f et g sont continues en a. Alors $f+g$, λf et fg sont continues en a. Si, de plus, $f(a) \neq 0$, alors il existe un voisinage U de a tel que la fonction $1/f$ soit définie sur $U \cap \mathcal{D}$, et $1/f$ est continue en a.*
5. *On suppose que f et g sont continues sur une partie $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$. Alors $f+g$, λf et fg sont continues sur $\mathcal{D}'$. Si, de plus, f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}'$, alors $1/f$ est définie et continue sur $\mathcal{D}'$.*

Preuve : On adapte les preuves des propositions 3.40 et 3.41.

1. Sous les hypothèses de l'énoncé, on montre que f tend vers ℓ en a en utilisant (4.38).
   Soit $\epsilon > 0$. Comme h tend vers 0 en a, il existe, par (4.38) avec f remplacée par h et ℓ remplacée par 0, un voisinage U_0 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_0$, on ait $|h(x)| < \epsilon$. Soit $U_1 = U \cap U_0$. C'est un voisinage de a (cf. propositions 2.6 et 2.12). Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_1$, on a $x \in U$ donc, par (4.39), $|f(x) - \ell| \leq h(x)$ et, comme $x \in U_0$, $h(x) \leq |h(x)| < \epsilon$. Donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que f tend vers ℓ en a.
2. On remarque que, pour tout $x \in \mathcal{D}$,
   $$\big||f - \ell|(x) - 0\big| = \big||f(x) - \ell| - 0\big| = |f(x) - \ell| .$$
   Donc (4.38) est identique à (4.38) pour f remplacée $|f - \ell|$ et ℓ remplacée par 0. En utilisant la remarque 4.30 pour f et $|f - \ell|$, on obtient l'équivalence (4.40).
   Montrons (4.42). On suppose que $\lim_a f = \ell$. D'après ce que l'on vient de démontrer, la fonction $|f - \ell|$ tend vers 0 en a. De plus, pour $x \in \mathcal{D}$, on a, par (2.3),
   $$\big||f(x)| - |\ell|\big| \leq |f(x) - \ell|$$
   donc, par le théorème des gendarmes appliqué à $|f|$ (cf. 1), $\lim_a |f| = |\ell|$. On a montré (4.42).
3. a). On montre que $\ell + \ell'$ est limite de $f + g$ en a, c'est-à-dire la proposition (4.38) avec f remplacée par $f + g$ et ℓ remplacée par $\ell + \ell'$.
   On remarque tout d'abord que, pour tout $x \in \mathcal{D}$,
   $$\big|(f + g)(x) - (\ell + \ell')\big| = \big|(f(x) - \ell) + (g(x) - \ell')\big| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| , \quad (4.43)$$
   d'après l'inégalité triangulaire (cf. (2.2) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et (2.6) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_1$, on ait $|f(x) - \ell| < (\epsilon/2)$. De même, comme $\lim_a g = \ell'$, il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_2$, on ait $|g(x) - \ell'| < (\epsilon/2)$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $|f(x) - \ell| < (\epsilon/2)$, car $x \in U_1$, et $|g(x) - \ell'| < (\epsilon/2)$, car $x \in U_2$. Donc, par (4.43), $|(f + g)(x) - (\ell + \ell')| < 2(\epsilon/2) = \epsilon$. On a montré que $f + g$ tend vers $\ell + \ell'$ en a.

   b). On montre maintenant que $\ell \cdot \ell'$ est limite de $f \cdot g$ en a, c'est-à-dire la proposition (4.38) avec f remplacée par fg et ℓ remplacée par $\ell\ell'$.
   On écrit tout d'abord, pour tout $x \in \mathcal{D}$,
   $$(f \cdot g)(x) - (\ell \cdot \ell') = f(x) \cdot (g(x) - \ell') + (f(x) - \ell) \cdot \ell' .$$
   Donc, par l'inégalité triangulaire,
   $$\big|(f \cdot g)(x) - (\ell \cdot \ell')\big| \leq |f(x)| \cdot \big|g(x) - \ell'\big| + |f(x) - \ell| \cdot |\ell'| . \quad (4.44)$$
   Soit $\epsilon > 0$. Soit
   $$\epsilon' \in \left]0\,;\, \min\left(1; \frac{\epsilon}{|\ell| + |\ell'| + 1}\right)\right] .$$
   Comme $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_1$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon'$. De même, comme $\lim_a g = \ell'$, il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_2$, on ait $|g(x) - \ell'| < \epsilon'$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $|f(x) - \ell| < \epsilon'$, car $x \in U_1$, et $|g(x) - \ell'| < \epsilon'$, car $x \in U_2$. Donc, par (4.44) et le choix de ϵ',
   $$\big|(f \cdot g)(x) - (\ell \cdot \ell')\big| < \big(\epsilon' + |\ell|\big) \cdot \epsilon' + \epsilon'|\ell'| \leq \epsilon' \cdot \big(1 + |\ell| + |\ell'|\big) \leq \epsilon .$$
   On a montré que fg tend vers $\ell\ell'$ en a.

   c). En remplaçant la fonction v par la fonction constante égale à λ, qui tend en a vers λ, dans le résultat précédent, on obtient $\lim_a (\lambda f) = \lambda\ell$.

d). On suppose maintenant que $\ell \neq 0$. Par la remarque 3.31, il existe un voisinage A de ℓ et un voisinage B de 0 tels que $A \cap B = \emptyset$. Comme $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage U_0 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_0$, on ait $f(x) \in A$ (cf. (4.1)). Comme B contient 0 (cf. remarque 3.31) et $A \cap B = \emptyset$, $f(x) \neq 0$. Donc la fonction $1/f$ est bien définie sur $\mathcal{D}_0 := U_0 \cap \mathcal{D}$. De plus, a est adhérent à $\mathcal{D}_0$ (cf. remarque 4.9). Montrons maintenant que $1/\ell$ est la limite en a de $1/f$ en utilisant la proposition (4.38) avec f remplacée par $1/f$ et ℓ remplacée par $1/\ell$.
Comme B est un voisinage de 0, il existe $\delta_0 > 0$ tel que le disque $D(0;\delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et l'intervalle $I(0;\delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathcal{D}_0$, on a $f(x) \notin B$, donc $f(x) \notin D(0;\delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $f(x) \notin I(0;\delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire $|f(x)| \geq \delta_0$. De plus, pour $x \in \mathcal{D}_0$,

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - f(x)}{f(x) \cdot \ell}$$

donc

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{\left|\ell - f(x)\right|}{|f(x)| \cdot |\ell|} \leq \frac{\left|f(x) - \ell\right|}{\delta_0 \cdot |\ell|} . \tag{4.45}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit $\epsilon' \in]0;\ \delta_0 \cdot |\ell| \cdot \epsilon]$, ce qui est possible car $\delta_0 \cdot |\ell| \cdot \epsilon > 0$. Comme $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_1$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon'$. Soit $U = U_0 \cap U_1$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in \mathcal{D}_0$ avec $x \in U$, on a $x \in U_1$ et, d'après (4.45),

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{\epsilon'}{\delta_0 \cdot |\ell|} \leq \epsilon .$$

On a montré que $\lim_a (1/f) = 1/\ell$.

4. D'après la définition de la continuité en a (cf. définition 4.14), il suffit d'appliquer le 3 avec $\ell = f(a)$ et $\ell' = g(a)$.
5. D'après la définition de la continuité sur $\mathcal{D}'$ (cf. définition 4.14), il suffit d'appliquer le 4. □

On termine ce paragraphe par un résultat commode sur les fonctions complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On rappelle que l'on a défini les parties réelle et imaginaire d'une fonction complexe dans la définition 4.5.

Proposition 4.32. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On a l'équivalence*

$$\lim_a f = \ell \iff \Big(\big(\lim_a \Re(f) = \Re(\ell)\big) \quad et \quad \big(\lim_a \Im(f) = \Im(\ell)\big)\Big) .$$

Preuve : On adapte la preuve de la proposition 3.42.
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim_a f = \ell$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a, d'après (2.4),

$$\big|(\Re(f))(x) - \Re(\ell)\big| = \big|\Re(f(x) - \ell)\big| \leq |f(x) - \ell| \quad \text{et} \quad \big|(\Im(f))(x) - \Im(\ell)\big| = \big|\Im(f(x) - \ell)\big| \leq |f(x) - \ell|.$$

En appliquant deux fois la propriété des gendarmes de la proposition 4.31 avec $h = |f - \ell|$, qui tend vers 0 d'après l'hypothèse et (4.40), on en déduit que $\lim_a \Re(f)$ existe et vaut $\Re(\ell)$ et que $\lim_a \Im(f)$ existe et vaut $\Im(\ell)$.
$\Longleftarrow$) : On suppose qu'en a, $\Re(f)$ tend vers $\Re(\ell)$ et que $\Im(u)$ tend vers $\Im(\ell)$. Par la proposition 4.31 (avec f remplacée par $\Im(f)$ et $\lambda = i$), $i\Im(f)$ tend vers $i\Im(\ell)$ en a. Par la proposition 4.31 (avec f remplacée par $\Re(f)$ et g remplacée par $i\Im(g)$), $f = \Re(f) + i\Im(f)$ tend vers $\Re(\ell) + i\Im(\ell) = \ell$ en a. □

4.3.3 Propriétés propres aux limites de fonctions réelles.

On reprend le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on établit, pour les fonctions réelles, un pendant de la proposition 4.31 pour des limites infinies et certaines propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Remarque 4.33. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. D'après les propositions 4.23 et 4.26,* $(\lim_a f = +\infty)$ *est équivalente à*

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \big((x \in U) \implies (f(x) > L)\big) \tag{4.46}$$

et $(\lim_a f = -\infty)$ *est équivalente à*

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \big((x \in U) \implies (f(x) < -L)\big)\,. \tag{4.47}$$

On commence par des propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. On rappelle la convention adoptée pour les limites de suites : on décide que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et aussi à $-\infty$; on décide que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel.

Proposition 4.34. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$, tels que $\ell = \lim_a f$ et $\ell' = \lim_a g$.*

1. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b < \ell$. Alors f est strictement supérieure à b "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > b$.*
2. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \ell$. Alors f est strictement inférieure à b "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < b$.*
3. *Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f est bornée "près de a", i.e. il existe $(m; M) \in \mathbb{R}^2$ et un voisinage U de a tels que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $m \leq f(x) \leq M$.*
4. *On suppose que f est inférieure à g "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) \leq g(x)$. Alors $\ell \leq \ell'$.*
5. *On suppose qu'une fonction réelle $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est encadrée par f et g "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, et que $\ell = \ell' \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_a h$ existe et vaut $\ell = \ell'$.*
6. *On suppose qu'une fonction réelle $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est minorée par f "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) \leq h(x)$, et que $\ell = +\infty$. Alors $\lim_a h$ existe et vaut $\ell = +\infty$.*
7. *On suppose qu'une fonction réelle $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée par g "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $h(x) \leq g(x)$, et que $\ell' = -\infty$. Alors $\lim_a h$ existe et vaut $\ell' = -\infty$.*

Avant de passer à la preuve de cette proposition, faisons quelques commentaires.
On ne peut appliquer la proposition 4.34 à f (ou à f et g) que si l'on sait déjà que f a une limite (ou que f et g ont une limite) en a.
Grâce à la convention précédente, les propriétés ont bien un sens lorsque une (les) limite(s) est (sont) infinie(s). De plus, elles sont encore vraies.
La propriété 1 donne, en particulier, que, si f tend vers une limite strictement positive (y compris $+\infty$) en a, alors f est strictement positive près de a.
La propriété 2 donne, en particulier, que, si f tend vers une limite strictement négative (y compris $-\infty$) en a, alors f est strictement négative près de a.
La propriété 4 s'interprète comme un passage à la limite $x \to a$ dans les inégalités $f(x) \leq g(x)$, qui sont vraies près de a. Si l'on suppose que $f(x) < g(x)$ près de a, on a seulement $\ell \leq \ell'$, en général comme le montre le contre-exemple suivant :
Soit f la fonction nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $g : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $g(x) = 1/x$. On a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = 0 < g(x)$ mais, comme on l'a vu au paragraphe 4.2.4, $\lim_{+\infty} f = 0 = \lim_{+\infty} g$. La proposition $(\lim_{+\infty} f < \lim_{+\infty} g)$ est donc fausse.
On peut reformuler ceci en disant que, quand on passe à la limite $x \to a$ dans des inégalités strictes, on récupère une inégalité large.

On utilise souvent cette propriété 4 lorsque l'une des fonctions est constante. Par exemple, si l'on considère une fonction réelle positive qui a une limite en a alors sa limite est positive (en appliquant la propriété 4 avec f constante égale à 0).
La propriété 5 est appelée "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes". Les fonctions f et g jouent le rôle de gendarme. On remarque que, dans le cas où $f = -g$ et $\ell = \ell' = 0$, on a, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, les équivalences

$$(f(x) \leq h(x) \leq g(x)) \iff (-g(x) \leq h(x) \leq g(x)) \iff (|h(x)| \leq g(x)) . \tag{4.48}$$

Ceci explique la terminologie utilisée dans la proposition 4.31.
En raison de leur proximité avec la propriété 5, on peut aussi désigner par "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes" les propriétés 6 et 7, même s'il n'y a qu'un seul "gendarme".

Voyons un exemple d'application d'un de ces théorèmes des gendarmes. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2(1+x^2)^{-1}$. On étudie l'existence de la limite en 0. On devine que la fonction est continue en 0 donc que sa limite en 0 existe et vaut $f(0) = 0$. Pour démontrer cela, on peut utiliser des résultats de la proposition 4.31. On va ici utiliser le théorème des gendarmes.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x^2 \geq 1$, donc $0 \leq (1+x^2)^{-1} \leq 1$. D'où $0 \leq f(x) \leq x^2$. On a vu que $\lim_{x \to 0} x = 0$ donc, par le 3 de la proposition 4.31 pour fg avec $f = g = \mathrm{Id}$, on a $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$. Comme on a aussi $\lim_{x \to 0} 0 = 0$, on en déduit, par le théorème des gendarmes (cf. le 5 de la proposition 4.34), que $\lim_0 f$ existe et vaut 0. On remarque que l'on aurait aussi pu utiliser le 1 de la proposition 4.31.

Preuve de la proposition 4.34 :

1. Soit $V :=]b; +\infty[$. C'est un voisinage de ℓ (cf. la preuve de la proposition 3.43). Comme $\ell = \lim_a f$, il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in V$. Donc, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in V$ soit $f(x) > b$.
2. Soit $V :=]-\infty; b[$. C'est un voisinage de ℓ (cf. la preuve de la proposition 3.43). Comme $\ell = \lim_a f$, il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in V$. Donc, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in V$ soit $f(x) < b$.
3. On suppose $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $m = \ell - 1$ et $M = \ell + 1$. L'intervalle $[m; M]$ est un voisinage de ℓ car il contient $I(\ell; 1[$. Comme $\ell = \lim_a f$, il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in [m; M]$. Donc, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a bien $m \leq f(x) \leq M$.
4. On raisonne par l'absurde. Supposons que $\ell > \ell'$. Dans la preuve de la proposition 3.43, on a vu qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $V :=]b; +\infty[$ est un voisinage de ℓ et $V' :=]-\infty; b[$ est un voisinage de ℓ'. Comme $\ell = \lim_a f$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in V$. Comme $\ell' = \lim_a g$, il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, on ait $g(x) \in V'$. Soit $U_0 = U \cap U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U_0 \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in V$ car $x \in U_1$, $g(x) \in V'$ car $x \in U_2$, et $f(x) \leq g(x)$, car $x \in U$. Donc, $g(x) < b < f(x)$ et $f(x) \leq g(x)$. Contradiction. Conclusion $\ell \leq \ell'$.
5. Lorsque $\ell = +\infty$, la propriété est une conséquence de 6. Lorsque $\ell = -\infty$, la propriété est une conséquence de 7. On traite le cas où $\ell \in \mathbb{R}$. On montre (4.38) avec f remplacée par h et U remplacé par U' (U étant déjà défini dans l'hypothèse).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \lim_a f$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Comme $\ell = \lim_a g$, il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, on ait $|g(x) - \ell| < \epsilon$. Soit $U' = U \cap U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U' \cap \mathcal{D}$, on a, en utilisant successivement que $x \in U_1$, $x \in U$ et $x \in U_2$, que $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ et $\ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon$, donc
$$\ell - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \ell + \epsilon ,$$
c'est-à-dire $|h(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que h tend vers ℓ en a.

6. On montre (4.46) avec f remplacée par h et U remplacé par U' (U étant déjà défini dans l'hypothèse).
Soit $L > 0$. Comme $\lim\limits_a f = +\infty$, il existe, par (4.46), un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) > L$. Soit $U' = U \cap U_1$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $h(x) \geq f(x)$, car $x \in U$, et $f(x) > L$, car $x \in U_1$. Donc $h(x) > L$. On a montré que $\lim\limits_a h$ existe et vaut $+\infty$.
7. On montre (4.47) avec f remplacée par h et U remplacé par U' (U étant déjà défini dans l'hypothèse).
Soit $L > 0$. Comme $\lim\limits_a g = -\infty$, il existe, par (4.46), un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $g(x) < -L$. Soit $U' = U \cap U_1$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $h(x) \leq g(x)$, car $x \in U$, et $g(x) < -L$, car $x \in U_1$. Donc $h(x) < -L$. On a montré que $\lim\limits_a h$ existe et vaut $-\infty$. □

Maintenant, on revient sur les propriétés du 3 de la proposition 4.31 mais pour des fonctions réelles et seulement lorsque au moins l'une des limites ℓ et ℓ' est infinie.

Proposition 4.35. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$, tels que $\ell = \lim\limits_a f$ et $\ell' = \lim\limits_a g$. Alors, dans les cas suivants, les limites suivantes existent et on a :*

a). Si $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_a (f + g) = \ell$;

b). Si $\ell' = \ell$ alors $\lim\limits_a (f + g) = \ell$;

c). Si $\lambda > 0$ alors $\lim\limits_a (\lambda f) = \ell$ et si $\lambda < 0$ alors $\lim\limits_a (\lambda f) = -\ell$;

d). Si $\lambda = 0$ alors $\lim\limits_a (\lambda f) = 0$;

e). Si $\ell' > 0$ alors $\lim\limits_a (fg) = \ell$ et si $\ell' < 0$ alors $\lim\limits_a (fg) = -\ell$;

f). La fonction $1/f$ est définie “près de a” et tend vers 0 en a, i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) \neq 0$ et $\lim\limits_a (1/f) = 0$.

g). Si $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, à valeurs strictement positives “près de a”, i.e. il existe un voisinage réel U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $h(x) > 0$, et qui tend vers 0 en a, alors $1/h$ est bien définie “près de a”, i.e. sur $U \cap \mathcal{D}$, et $\lim\limits_a (1/h) = +\infty$.

h). Si $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, à valeurs strictement négatives “près de a”, i.e. il existe un voisinage réel U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $h(x) < 0$, et qui tend vers 0 en a, alors $1/h$ est bien définie “près de a”, i.e. sur $U \cap \mathcal{D}$, et $\lim\limits_a (1/h) = -\infty$.

Comme dans la proposition 3.44, les cas non considérés sont indéterminés.

Preuve de la proposition 4.35 :

a). On sépare les cas où $\ell = +\infty$ de ceux où $\ell = -\infty$.
<u>Cas $\ell = +\infty$</u> : On montre que $\lim\limits_a (f + g) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.46) avec f remplacée par $f + g$. Soit $L > 0$. Soit $L' = \max(1; L - \ell' + 1) > 0$. Comme $\lim\limits_a f = +\infty$, on sait, par cette même proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L'$. Comme $\lim\limits_a g = \ell'$, on sait, par la proposition (4.38) (avec f remplacée par g), qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, $\ell' - 1 < g(x) < \ell' + 1$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > L'$, car $x \in U_1$, et $\ell' - 1 < g(x) < \ell' + 1$, car $x \in U_2$. Donc $f(x) + g(x) > L' + \ell' - 1 \geq L$. On a montré que $\lim\limits_a (f + g) = +\infty$.
<u>Cas $\ell = -\infty$</u> : On montre que $\lim\limits_a (f + g) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.47) avec f remplacée par $f + g$. Soit $L > 0$. Soit $L' = \max(1; L + \ell' + 1) > 0$. Comme $\lim\limits_a f = -\infty$, on sait, par cette même proposition (4.47), qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L'$. Comme $\lim\limits_a g = \ell'$, on sait, par la proposition (4.38) (avec f remplacée par g), qu'il existe un voisinage U_2

de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, $\ell' - 1 < g(x) < \ell' + 1$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -L'$, car $x \in U_1$, et $\ell' - 1 < g(x) < \ell' + 1$, car $x \in U_2$. Donc $f(x) + g(x) < -L' + \ell' + 1 \leq -L$. On a montré que $\lim_a (f + g) = -\infty$.

b). On sépare le cas où $\ell = \ell' = +\infty$ du cas où $\ell = \ell' = -\infty$.

Cas $\ell = \ell' = +\infty$: On montre que $\lim_a (f + g) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.46) avec f remplacée par $f + g$. Soit $L > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L$. Comme $\lim_a g = +\infty$, on sait, toujours par la proposition (4.46) (avec f remplacée par g), qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, $g(x) > 1$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > L$, car $x \in U_1$, et $g(x) > 1$, car $x \in U_2$. Donc $f(x) + g(x) > L + 1 \geq L$. On a montré que $\lim_a (f + g) = +\infty$.

Cas $\ell = \ell' = -\infty$: On montre que $\lim_a (f + g) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.47) avec f remplacée par $f + g$. Soit $L > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par la proposition (4.47), qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L$. Comme $\lim_a g = -\infty$, on sait, toujours par la proposition (4.47) (avec f remplacée par g), qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, $g(x) < -1$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -L$, car $x \in U_1$, et $g(x) < -1$, car $x \in U_2$. Donc $f(x) + g(x) < -L - 1 \leq -L$. On a montré que $\lim_a (f + g) = -\infty$.

c). On distingue quatre cas.

Cas où $\lambda > 0$ et $\ell = +\infty$: On montre que $\lim_a (\lambda f) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.46) avec f remplacée par (λf). Soit $L > 0$. Soit $L' = L/\lambda > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L'$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > L'$ et $\lambda > 0$ donc $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) > \lambda L' = L$. On a montré que $\lim_a (\lambda f) = +\infty$.

Cas où $\lambda < 0$ et $\ell = +\infty$: On montre que $\lim_a (\lambda f) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.47) avec f remplacée par (λf). Soit $L > 0$. Soit $L' = -L/\lambda > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L'$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > L'$ et $\lambda < 0$ donc $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) < \lambda L' = -L$. On a montré que $\lim_a (\lambda f) = -\infty$.

Cas où $\lambda > 0$ et $\ell = -\infty$: On montre que $\lim_a (\lambda f) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.46) avec f remplacée par (λf). Soit $L > 0$. Soit $L' = L/\lambda > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par la proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L'$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -L'$ et $\lambda > 0$ donc $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) < -\lambda L' = -L$.

Cas où $\lambda < 0$ et $\ell = -\infty$: On montre que $\lim_a (\lambda f) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.47) avec f remplacée par (λf). Soit $L > 0$. Soit $L' = L/(-\lambda) > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par la proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L'$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -L'$ et $\lambda < 0$ donc $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) > -\lambda L' = L$.

d). Comme (λu) est constante égale à 0, elle tend vers 0 en a.

e). On distingue quatre cas.

Cas où $\ell' > 0$ et $\ell = +\infty$: Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement positive sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que g est strictement supérieure à $\ell'/2 > 0$ sur $U_2 \cap \mathcal{D}$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > 0$, car $x \in U_1$, et $g(x) > \ell'/2 > 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x)g(x) > (\ell'/2)f(x)$. Par c), $\lim_a ((\ell'/2)f) = +\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 4.34), $\lim_a (fg) = +\infty$.

Cas où $\ell' < 0$ et $\ell = +\infty$: Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement positive sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que g est strictement inférieure à $\ell'/2 < 0$ sur

$U_2 \cap \mathcal{D}$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > 0$, car $x \in U_1$, et $g(x) < \ell'/2 < 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x)g(x) < (\ell'/2)f(x)$. Par c), $\lim_a((\ell'/2)f) = -\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 4.34), $\lim_a(fg) = -\infty$.

<u>Cas où $\ell' > 0$ et $\ell = -\infty$</u> : Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement négative sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que g est strictement supérieure à $\ell'/2 > 0$ sur $U_2 \cap \mathcal{D}$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < 0$, car $x \in U_1$, et $g(x) > \ell'/2 > 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x)g(x) < (\ell'/2)f(x)$. Par c), $\lim_a((\ell'/2)f) = -\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 4.34), $\lim_a(fg) = -\infty$.

<u>Cas où $\ell' < 0$ et $\ell = -\infty$</u> : Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement négative sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que g est strictement inférieure à $\ell'/2 < 0$ sur $U_2 \cap \mathcal{D}$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < 0$, car $x \in U_1$, et $g(x) < \ell'/2 < 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x)g(x) > (\ell'/2)f(x)$. Par c), $\lim_a((\ell'/2)f) = +\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 4.34), $\lim_a(fg) = +\infty$.

f). On distingue deux cas.
<u>Cas où $\ell > 0$</u> : Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement positive sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Donc $1/f$ est bien définie sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Montrons que $\lim_a(1/f) = 0$ en utilisant la proposition (4.38).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, il existe, par la proposition (4.46), un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > (1/\epsilon)$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > (1/\epsilon) > 0$ donc $0 < (1/f(x)) < \epsilon$. On a montré que $\lim_a(1/f) = 0$.
<u>Cas où $\ell < 0$</u> : Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par la proposition 4.34, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement négative sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Donc $1/f$ est bien définie sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Montrons que $\lim_a(1/f) = 0$ en utilisant la proposition (4.38).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, il existe, par la proposition (4.46), un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -(1/\epsilon)$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -(1/\epsilon) < 0$ donc $-\epsilon < (1/f(x)) < 0$. On a montré que $\lim_a(1/f) = 0$.

g). Soit U_0 un voisinage de a sur lequel h est strictement positive. Donc $(1/h)$ est bien définie sur U_0. Montrons que $\lim_a(1/h) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.46).
Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim_a h = 0$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $|h(x)| < (1/L)$. Soit $U = U_0 \cap U_1$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $h(x) > 0$, car $x \in U_0$, et $|h(x)| < (1/L)$, car $x \in U_1$. Donc $0 < h(x) < (1/L)$. D'où $(1/h(x)) > L$. On a montré que $\lim_a(1/h) = +\infty$.

h). Soit U_0 un voisinage de a sur lequel h est strictement négative. Donc $(1/h)$ est bien définie sur U_0. Montrons que $\lim_a(1/h) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.47).
Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim_a h = 0$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $|h(x)| < (1/L)$. Soit $U = U_0 \cap U_1$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $h(x) < 0$, car $x \in U_0$, et $|h(x)| < (1/L)$, car $x \in U_1$. Donc $0 < -h(x) < (1/L)$. Comme $L > 0$, on a $-Lh(x) < 1$ et, comme $h(x) < 0$, $(1/h(x)) < -L$. On a montré que $\lim_a(1/h) = -\infty$. □

On s'intéresse maintenant aux fonctions monotones. On commence par les limites à l'infini.

Proposition 4.36. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \{-\infty; +\infty\}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors $\lim_a f$ existe. On pose $\sup f := \sup f(\mathcal{D})$ et $\inf f = \inf f(\mathcal{D})$.*

1. *Si f est croissante et $a = +\infty$, $\lim_{+\infty} f = \sup f$.*

2. *Si f est décroissante et $a = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = \inf f$.*
3. *Si f est croissante et $a = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = \inf f$.*
4. *Si f est décroissante et $a = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = \sup f$.*

Preuve :

1. On suppose f croissante et $a = +\infty$.

   a). Cas où $\sup f(\mathcal{D}) = +\infty$. On montre que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ en utilisant (4.27).

   Soit $L > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}) = +\infty$, L n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) > L$. Comme $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A \in]1 + |x_0|; +\infty[\cap \mathcal{D}$. On a $A > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a, puisque f est croissante et $A \geq x_0$, $f(x) \geq f(A) \geq f(x_0) > L$. On a montré $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

   b). Cas où $\sup f(\mathcal{D}) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ en utilisant (4.21).

   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}) = \ell$, $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A \in]1 + |x_0|; +\infty[\cap \mathcal{D}$. On a $A > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a, puisque f est croissante et $A \geq x_0$, $f(x) \geq f(A) \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme ℓ majore $f(\mathcal{D})$, on a aussi $f(x) \leq \ell$. Donc $\ell - \epsilon < f(x) \leq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

2. On suppose f décroissante et $a = +\infty$.

   a). Cas où $\inf f(\mathcal{D}) = -\infty$. On montre que $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ en utilisant (4.30).

   Soit $L > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}) = -\infty$, $-L$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) < -L$. Comme $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A \in]1 + |x_0|; +\infty[\cap \mathcal{D}$. On a $A > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a, puisque f est décroissante et $A \geq x_0$, $f(x) \leq f(A) \leq f(x_0) < -L$. On a montré $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

   b). Cas où $\inf f(\mathcal{D}) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ en utilisant (4.21).

   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}) = \ell$, $\ell + \epsilon$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A \in]1 + |x_0|; +\infty[\cap \mathcal{D}$. On a $A > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a, puisque f est décroissante et $A \geq x_0$, $f(x) \leq f(A) \leq f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme ℓ minore $f(\mathcal{D})$, on a aussi $f(x) \geq \ell$. Donc $\ell + \epsilon > f(x) \geq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

3. On suppose f croissante et $a = -\infty$.

   a). Cas où $\inf f(\mathcal{D}) = -\infty$. On montre que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ en utilisant (4.36).

   Soit $L > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}) = -\infty$, $-L$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) < -L$. Comme $-\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A' \in] - \infty; -1 - |x_0|[\cap \mathcal{D}$. On a $A := -A' > 0$ et $A' < -|x_0| \leq x_0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A = A'$, on a, puisque f est croissante, $f(x) \leq f(A') \leq f(x_0) < -L$. On a montré $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

   b). Cas où $\inf f(\mathcal{D}) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$ en utilisant (4.24).

   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}) = \ell$, $\ell + \epsilon$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme $-\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A' \in] - \infty; -1 - |x_0|[\cap \mathcal{D}$. On a $A := -A' > 0$ et $A' < -|x_0| \leq x_0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A = A'$, on a, puisque f est croissante, $f(x) \leq f(A') \leq f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme ℓ minore $f(\mathcal{D})$, on a aussi $f(x) \geq \ell$. Donc $\ell + \epsilon > f(x) \geq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$.

4. On suppose f décroissante et $a = -\infty$.

   a). Cas où $\sup f(\mathcal{D}) = +\infty$. On montre que $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ en utilisant (4.33).

   Soit $L > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}) = +\infty$, L n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) > L$. Comme $-\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A' \in] - \infty; -1 - |x_0|[\cap \mathcal{D}$. On a $A := -A' > 0$ et $A' < -|x_0| \leq x_0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A = A'$, on a, puisque f est décroissante, $f(x) \geq f(A') \geq f(x_0) > L$. On a montré $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

b). Cas où $\sup f(\mathcal{D}) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$ en utilisant (4.24).

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}) = \ell$, $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme $-\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A' \in]-\infty; -1 - |x_0|[\cap \mathcal{D}$. On a $A := -A' > 0$ et $A' < -|x_0| \leq x_0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A = A'$, on a, puisque f est décroissante, $f(x) \geq f(A') \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme ℓ majore $f(\mathcal{D})$, on a aussi $f(x) \leq \ell$. Donc $\ell - \epsilon < f(x) \leq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$. □

Donnons un exemple simple d'application. La fonction $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\mathrm{Id}(x) = x$, est strictement croissante et $\mathrm{Id}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Donc, par la proposition 4.36, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Id}(x) = \sup \mathbb{R} = +\infty$.

Passons maintenant aux limites en un point de $\mathbb{R}$ de fonctions monotones.

Proposition 4.37. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone.*

1. *Si a est adhérent à $\mathcal{D}_a^- =]-\infty; a[\cap \mathcal{D}$ alors $\lim\limits_{a^-} f$ existe et vaut $\sup f(\mathcal{D}_a^-)$, si f est croissante, et $\inf f(\mathcal{D}_a^-)$, si f est décroissante.*
2. *Si a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+ =]a; +\infty[\cap \mathcal{D}$ alors $\lim\limits_{a^+} f$ existe et vaut $\inf f(\mathcal{D}_a^+)$, si f est croissante, et $\sup f(\mathcal{D}_a^+)$, si f est décroissante.*

Attention : Il se peut que, pour $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone, $\lim\limits_{a} f$ n'existe pas, même si $a \in \mathcal{D}$. Reprenons l'exemple de la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. f est croissante et définie en 0 mais on a vu que $\lim\limits_{0} f$ n'existe pas.

Preuve de la proposition 4.37 :

1. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$ et f croissante.

   a). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^-) = +\infty$. On montre que $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$ en utilisant (4.15) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^-}$.

   Soit $L > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^-) = +\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^-$ tel que $f(x_0) > L$. On choisit $\delta \in]0; a - x_0]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^-$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x > a - \delta \geq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > L$. On a montré que $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$.

   b). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^-) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{a^-} f = \ell$ en utilisant (4.12) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^-}$.

   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^-) = \ell$, $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D}_a^-)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^-$ tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; a - x_0]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^-$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x > a - \delta \geq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme ℓ majore $f(\mathcal{D}_a^-)$, on a aussi $f(x) \leq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{a^-} f = \ell$.

2. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$ et f décroissante.

   a). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^-) = -\infty$. On montre que $\lim\limits_{a^-} f = -\infty$ en utilisant (4.18) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^-}$.

   Soit $L > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^-) = -\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^-$ tel que $f(x_0) < -L$. On choisit $\delta \in]0; a - x_0]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^-$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x > a - \delta \geq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < -L$. On a montré que $\lim\limits_{a^-} f = -\infty$.

   b). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^-) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{a^-} f = \ell$ en utilisant (4.12) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^-}$.

   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^-) = \ell$, $\ell + \epsilon$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D}_a^-)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^-$ tel que $f(x_0) < \ell + \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; a - x_0]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^-$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x > a - \delta \geq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme ℓ minore $f(\mathcal{D}_a^-)$, on a aussi $f(x) \geq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{a^-} f = \ell$.

3. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ et f croissante.
   a). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = -\infty$. On montre que $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$ en utilisant (4.18) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $L > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = -\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) < -L$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < -L$. On a montré que $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$.
   b). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{a^+} f = \ell$ en utilisant (4.12) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = \ell$, $\ell + \epsilon$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D}_a^+)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) < \ell + \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme ℓ minore $f(\mathcal{D}_a^+)$, on a aussi $f(x) \geq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{a^+} f = \ell$.
4. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ et f décroissante.
   a). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = +\infty$. On montre que $\lim\limits_{a^+} f = +\infty$ en utilisant (4.15) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $L > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = +\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) > L$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > L$. On a montré que $\lim\limits_{a^+} f = +\infty$.
   b). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{a^+} f = \ell$ en utilisant (4.12) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = \ell$, $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D}_a^+)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme ℓ majore $f(\mathcal{D}_a^+)$, on a aussi $f(x) \leq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{a^+} f = \ell$. □

5 Continuité sur un intervalle de fonctions réelles.

Dans cette partie, on va s'intéresser aux fonctions réelles continues sur un intervalle. On rappelle que la notion de continuité sur un intervalle a été définie dans la définition 4.14.

Théorème 5.1. Théorème des valeurs intermédiaires. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, I un intervalle non vide inclu dans $\mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle qui est continue sur I. Alors, pour tout $(a; b) \in I^2$, pour tout réel ℓ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in I$ compris entre a et b tel que $\ell = f(x)$.*

Preuve : Soit $(a; b) \in I^2$ et ℓ compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Si $\ell = f(a)$ (resp. $\ell = f(b)$), $x = a$ (resp. $x = b$) convient.
Si $f(a) = f(b)$, $\ell = f(a)$ donc $x = a$ convient.
Si $a = b$, on a encore $f(a) = f(b)$ donc $\ell = f(a)$ et $x = a$ convient encore.
On suppose désormais que $a \neq b$, $f(a) \neq f(b)$, $\ell \neq f(a)$ et $\ell \neq f(b)$. On traite séparément les trois cas suivants : ($a < b$ et $f(a) > f(b)$) ; ($a < b$ et $f(a) < f(b)$) ; $a > b$.

a). Cas où $a < b$ et $f(a) > f(b)$. Soit $\ell \in]f(b); f(a)[$. Soit

$$A := \{x \in [a; b] ; \quad f(x) > \ell\} .$$

A est non vide car $a \in A$, par hypothèse. On a $A \subset [a; b] \subset I$. Soit $s = \sup A$. Comme A est majorée par b, $s \leq b$. Comme $a \in A$, $a \leq s$. Donc $s \in [a; b] \subset I$. Par la proposition 3.45, il existe une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $s = \lim\limits_{n} s_n$. Comme f est continue sur I, elle est continue

en s donc, par la proposition 4.15, $\lim_n f(s_n)$ existe et vaut $f(s)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \in A$ donc $f(s_n) > \ell$. Par passage à la limite $n \to +\infty$ dans ces inégalités (cf. proposition 3.43), on obtient $f(s) \geq \ell$.
Supposons $f(s) > \ell$. On a forcément $s \neq b$ car $f(b) < \ell$ et, comme $s \leq b$, on a en fait $s < b$. Comme $\lim_{x \to s} f(x) = f(s)$, on a, pour $\epsilon = (f(s) - \ell) > 0$, l'existence d'un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - s| < \delta$, on ait $|f(x) - f(s)| < \epsilon$ (cf. (4.12)). Soit $x_0 = s + (1/2)\min(b - s; \delta) > s$. On a $|x_0 - s| < \delta$ et $x_0 \in]s; b] \subset [a; b] \subset I \subset \mathcal{D}$. On a donc $|f(x_0) - f(s)| < \epsilon$ soit, en particulier, $f(x_0) > f(s) - \epsilon = \ell$. Comme $x_0 \in [a; b]$, on a $x_0 \in A$. Par définition de s, $s \geq x_0$. Contradiction avec $x_0 = s + (1/2)\min(b - s; \delta) > s$.
L'hypothèse $f(s) > \ell$ est donc fausse. On a donc $f(s) \leq \ell$. Comme $f(s) \geq \ell$, on obtient $f(s) = \ell$ avec $s \in [a; b]$.

b). Cas où $a < b$ et $f(a) < f(b)$. Soit $\ell \in]f(a); f(b)[$. On considère la fonction $g = -f$, qui est définie sur $\mathcal{D}$. Comme f est continue sur I, g est continue sur I par la proposition 4.31. De plus, $g(a) = -f(a) > -f(b) = g(b)$. D'après le a) appliqué à g, tout réel ℓ' compris entre $g(a)$ et $g(b)$ est l'image par g d'un certain $x' \in [a; b]$. Comme $-\ell \in]-f(b); -f(a)[=]g(b); g(a)[$, il existe donc un $x \in [a; b]$ tel que $g(x) = -\ell$. D'où $f(x) = -g(x) = \ell$.

c). Cas où $a > b$. Soit ℓ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On considère $h : [-b; -a] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(-x)$. On sait que l'application Id est continue sur $\mathbb{R}$ donc, par la proposition 4.31, il en est de même de $-\mathrm{Id}$. Comme $-\mathrm{Id}$ envoie $[-b; -a]$ sur $[a; b]$, où f est continue, on a, par composition, la continuité de h (cf. corollaire 4.29). De plus, ℓ est compris entre $f(a) = h(-a)$ et $f(b) = h(-b)$. On applique à h avec $(a; b)$ remplacé par $(-b; -a)$ le a) si $h(-b) > h(-a)$ ou le b) si $h(-b) < h(-a)$. Il existe donc y compris entre $-b$ et $-a$ tel que $h(y) = \ell$. D'où $\ell = h(y) = f(-y)$ avec $-y$ compris entre a et b. □

Une application classique de ce résultat est la suivante. Si un fonction continue sur un intervalle prend une valeur positive et une valeur négative sur cet intervalle, alors elle s'annule sur cet intervalle. Il suffit d'appliquer le théorème 5.1 avec $f(a)$ une valeur positive et $f(b)$ une valeur négative.

Voyons maintenant une conséquence importante du théorème 5.1.

Corollaire 5.2. *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et continue sur I. Alors l'image $f(I)$ de I par f est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Preuve : Comme I est non vide, $f(I)$ est aussi non vide. Soit $v_- := \inf f(I) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ et $v_+ := \sup f(I) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$. On montre d'abord l'inclusion $]v_-; v_+[\subset f(I)$ puis que $f(I)$ est un intervalle.

1. Si $v_- = v_+$, l'intervalle $]v_-; v_+[$ est vide donc inclu dans $f(I)$. On suppose désormais que $v_- \neq v_+$. On a forcément $v_- < v_+$, par la proposition 1.5. Soit $y \in]v_-; v_+[$. Comme $y > v_-$, y ne minore pas $f(I)$. Il existe donc $x_- \in I$ tel que $f(x_-) < y$. Comme $y < v_+$, y ne majore pas $f(I)$. Il existe donc $x_+ \in I$ tel que $y < f(x_+)$. Par le théorème 5.1 avec $\mathcal{D}$ remplacé par I, $(a; b)$ remplacé par $(x_-; x_+)$ et ℓ remplacé par y, il existe x compris entre x_- et x_+ tel que $y = f(x)$. Comme I est un intervalle, $x \in I$, donc $y \in f(I)$. Ceci étant vrai pour tout $y \in]v_-; v_+[$, on a montré que $]v_-; v_+[\subset f(I)$.
2. On montre que $f(I)$ est l'un des intervalles suivants : $]v_-; v_+[$, $]v_-; v_+]$, $[v_-; v_+[$ et $[v_-; v_+]$.
   a). Cas où $(v_-; v_+) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de v_- et v_+, on a, pour tout $x \in I$, $v_- \leq f(x) \leq v_+$. Donc $f(I) \subset [v_-; v_+]$. D'après le 1, $]v_-; v_+[\subset f(I)$ donc $f(I)$ est l'un des ensembles : $]v_-; v_+[$, $]v_-; v_+]$, $[v_-; v_+[$ et $[v_-; v_+]$, qui sont tous des intervalles.
   b). Cas où $v_- \in \mathbb{R}$ et $v_+ = +\infty$. Par définition de v_-, on a, pour tout $x \in I$, $v_- \leq f(x)$. Donc $f(I) \subset [v_-; +\infty[$. D'après le 1, $]v_-; +\infty[\subset f(I)$ donc $f(I)$ est l'un des ensembles : $]v_-; +\infty[$ et $[v_-; +\infty[$, qui sont tous des intervalles.
   c). Cas où $v_- = -\infty$ et $v_+ \in \mathbb{R}$. Par définition de v_+, on a, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq v_+$. Donc $f(I) \subset]-\infty; v_+]$. D'après le 1, $]-\infty; v_+[\subset f(I)$ donc $f(I)$ est l'un des ensembles : $]-\infty; v_+[$ et $]-\infty; v_+]$, qui sont tous des intervalles.
   d). Cas où $v_- = -\infty$ et $v_+ = +\infty$. Par 1, $]-\infty; +\infty[\subset f(I)$ donc $f(I) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$, qui est bien un intervalle. □

Attention : Le résultat ne dit pas que I et $f(I)$ sont forcément des intervalles de même nature. Il est possible que I soit un intervalle ouvert tandis que $f(I)$ est un intervalle fermé. Voyons un exemple. Soit $I =]-2;2[$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x+2$ si $x \in]-2;-1]$, $f(x) = -x$ si $x \in]-1;1[$, et $f(x) = x-2$ si $x \in [1;2[$. On vérifie que f est bien continue.
On montre maintenant que $f(I) = [-1;1]$.
Sur $]-2;-1]$, f est croissante donc, pour $x \in]-2;-1]$, on a $0 = \lim_{-2} f \leq f(x) \leq f(-1) = 1$ donc $f(x) \in [0;1]$. Sur $]-1;1[$, f est décroissante donc, pour $x \in]-1;1[$, on a $1 = f(-1) = \lim_{(-1)^+} f \geq f(x) \geq \lim_{1^-} f = f(1) = -1$ donc $f(x) \in [-1;1]$. Sur $[1;2[$, f est croissante donc, pour $x \in [1;2[$, on a $-1 = f(1) \leq f(x) \leq \lim_{2} f = 0$ donc $f(x) \in [-1;0]$. On a montré que $f(I) \subset [-1;1]$.
Soit $y \in [-1;1]$. Si $y = 1$ alors $y = f(-1)$. Si $y = -1$ alors $y = f(1)$. Si $y \in]-1;1[$, $y = f(-y)$. Donc $y \in f(I)$. On a montré que $[-1;1] \subset f(I)$.
Donc $f(I) = [-1;1]$, qui est bien un intervalle fermé.
On peut aussi avoir I non borné et $f(I)$ borné. C'est le cas pour $f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. On vérifie que, dans ce cas, $f(I) =]0;1]$.

Il y a cependant un cas particulier important : le cas où I est un intervalle fermé et borné.

Théorème 5.3. *Théorème de Heine. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. l'image $f([a;b])$ de $[a;b]$ par f est bornée et il existe $(c;d) \in [a;b]^2$ tel que*

$$f(c) \;=\; \inf f \;:=\; \inf f\big([a;\,b]\big) \quad et \quad f(d) \;=\; \sup f \;:=\; \sup f\big([a;\,b]\big)\,.$$

En particulier, $f(c)$ est le minimum de $f([a;b])$ et $f(d)$ est le maximum de $f([a;b])$. De plus, $f([a;b]) = [\inf f; \sup f]$.

Preuve :

1. On montre d'abord par l'absurde que f est bornée.
   a). Supposons que f ne soit pas majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n ne majore pas $f([a;b])$ donc il existe $x_n \in [a;b]$ tel que $f(x_n) > n$. Comme la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a;b]$, elle est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. théorème 3.53), il existe une extractrice $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{N}$ (où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x \circ \varphi$ soit convergente vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in D$, $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, on a, par passage à la limite $n \to +\infty$ dans les inégalités (cf. proposition 3.43), $a \leq \ell \leq b$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue au point ℓ. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ converge vers $f(\ell)$.
   Par ailleurs, on a, pour tout $n \in D$, $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n)$. On sait que φ est une suite tendant vers $+\infty$ (cf. proposition 3.50). Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.43), on déduit des inégalités précédentes que $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ tend vers $+\infty$. Contradiction puisqu'on a montré que cette suite tend vers $f(\ell) \in \mathbb{R}$.
   La fonction f est donc majorée.
   b). Supposons que f ne soit pas minorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n$ ne minore pas $f([a;b])$ donc il existe $x_n \in [a;b]$ tel que $f(x_n) < -n$. Comme la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a;b]$, elle est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. théorème 3.53), il existe une extractrice $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{N}$ (où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x \circ \varphi$ soit convergente vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in D$, $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, on a, par passage à la limite $n \to +\infty$ dans les inégalités (cf. proposition 3.43), $a \leq \ell \leq b$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue au point ℓ. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ converge vers $f(\ell)$.
   Par ailleurs, on a, pour tout $n \in D$, $f(x_{\varphi(n)}) < -\varphi(n)$. On sait que φ est une suite tendant vers $+\infty$ (cf. proposition 3.50) donc $-\varphi$ tend vers $-\infty$ (cf. proposition 3.44). Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.43), on déduit des inégalités précédentes que $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ tend vers $-\infty$. Contradiction puisqu'on a vu que cette suite tend vers $f(\ell) \in \mathbb{R}$.
   La fonction f est donc minorée.

2. On montre maintenant que les bornes supérieure et inférieure de f sont des valeurs de f.
   a). Notons $m_+ = \sup f$. On sait, par 1, que $m_+ \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure (cf. proposition 3.45), il existe une suite d'éléments de $f([a;b])$ qui converge vers m_+, c'est-à-dire il existe une partie infinie D de $\mathbb{N}$ et $(x_n)_{n\in D} \in [a;b]^D$ tels que la suite $(f(x_n))_{n\in D}$ converge vers m_+. En procédant comme au 1.a), on montre l'existence d'une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ (où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x\circ\varphi$ soit convergente vers un certain $\ell_+ \in [a;b]$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue en ℓ_+. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ_+ de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ converge vers $f(\ell_+)$. Comme cette suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ est une sous-suite de la suite convergente $(f(x_n))_{n\in D}$, elle converge donc vers m_+ (cf. proposition 3.51). Par unicité de sa limite (cf. proposition 3.33), on a donc $m_+ = f(\ell_+)$.
   b). Notons $m_- = \inf f$. On sait, par 1, que $m_- \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure (cf. proposition 3.45), il existe une suite d'éléments de $f([a;b])$ qui converge vers m_-, c'est-à-dire il existe une partie infinie D de $\mathbb{N}$ et $(x_n)_{n\in D} \in [a;b]^D$ tels que la suite $(f(x_n))_{n\in D}$ converge vers m_-. En procédant comme au 1.b), on montre l'existence d'une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ (où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x \circ \varphi$ soit convergente vers un certain $\ell_- \in [a;b]$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue en ℓ_-. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ_- de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ converge vers $f(\ell_-)$. Comme cette suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ est une sous-suite de la suite convergente $(f(x_n))_{n\in D}$, elle converge donc vers m_- (cf. proposition 3.51). Par unicité de sa limite (cf. proposition 3.33), on a donc $m_- = f(\ell_-)$.
3. On montre que $f([a;b]) = [\inf f; \sup f]$.
   Par définition des bornes supérieure et inférieure, on a $f([a;b]) \subset [\inf f; \sup f]$. Par 1 et 2, on sait que $\inf f \in f([a;b])$ et $\sup f \in f([a;b])$. Par le corollaire 5.2, on sait que $f([a;b])$ est un intervalle. Donc $f([a;b])$ contient $[\inf f; \sup f]$. On a montré l'égalité souhaitée par double inclusion. $\square$

6 Dérivabilité.

Dans cette partie, on s'intéresse à la notion de dérivabilité pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

6.1 Nombres dérivés, dérivée.

Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$. Près de a, on cherche à approcher “le mieux possible” le graphe de f par une droite non verticale passant par le point $(a; f(a))$.
Les droites de ce type se distinguent les unes des autres par leur pente. S'il existe une telle droite qui approche “mieux” le graphe de f que les autres, on dira que f est dérivable en a et la pente p de cette droite sera le nombre dérivé de f en a. Dans ce cas, le nombre dérivé en a donne une idée du comportement de f près de a puisque le graphe de f y ressemble à la droite d'équation $y = f(a) + p(x-a)$. Cette dernière sera appelée la tangente à f en a.
Si $\mathcal{D} = \{0\} \cup [1; +\infty[$ et $a = 0$, par exemple, on sent qu'aucune droite passant par $(a; f(a))$ n'approchera le graphe de f mieux que les autres. On remarque que, dans ce cas, 0 n'est pas adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{0\}$. On ne peut pas s'approcher de 0 en restant dans $\mathcal{D} \setminus \{0\}$.
Pour éviter ce phénomène, on imposera que a soit adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$.
Comment exprimer que le graphe de f est proche d'une droite, près de a ? Cela revient essentiellement à dire que, près de a, f est proche de g, où g est la fonction dont le graphe est la droite en question. Comment exprimer que f est proche de g, près de a ? Une façon naturelle est de dire que, près de a, la différence $f - g$ doit être négligeable devant $g - g(a)$. Bref, on demande que $f(x) - g(x)$ soit un petit “o” de $x - a$, c'est-à-dire le produit de $(x - a)$ par une fonction qui tend vers 0 en a.
Voyons un peu ce que veut dire cette dernière propriété. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 6.1. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $\ell \in \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$ qui est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe un voisinage U_0 de 0 et une fonction $\eta : U_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ tels que $\lim_0 \eta = 0$ et, pour tout $h \in U_0$ avec $a + h \in \mathcal{D}$,*
$$f(a+h) \;=\; f(a) \,+\, h \cdot \ell \,+\, h \cdot \eta(h)\,. \tag{6.1}$$
2. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *existe et vaut ℓ.*
3. $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *existe et vaut ℓ.*

Preuve : L'équivalence ($2 \iff 3$) découle du corollaire 4.28. On montre l'équivalence ($1 \iff 2$).
$1 \Longrightarrow 2$: On suppose 1 vraie. Pour étudier la limite du 2, on peut restreindre h à U_0 (cf. proposition 4.16). Pour $h \in U_0 \setminus \{0\}$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on a, d'après l'hypothèse,
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \;=\; \ell \,+\, \eta(h)\,.$$
Comme $\lim_0 \eta = 0$, le membre de gauche tend vers ℓ en 0, par somme (cf. proposition 4.31). On a donc montré 2.
$2 \Longrightarrow 1$: On suppose 2 vraie. Soit $\eta :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\eta(h) = 0$ si $a + h \notin \mathcal{D}$, par $\eta(0) = 0$ et par
$$\eta(h) \;=\; \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \,-\, \ell\,,$$
si $h \neq 0$ et $a + h \in \mathcal{D}$.
$]-1; 1[$ est bien un voisinage de 0. De plus, pour $h \in]-1; 1[$ tel que $a + h \in \mathcal{D}$, on a bien (6.1) (y compris pour $h = 0$). Il reste à montrer que $\lim_0 \eta = 0$. On le fait en utilisant (4.12).
Soit $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $\delta' > 0$ tel que, pour $h \in]-\delta'; \delta'[$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on ait
$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \,-\, \ell \right| \;<\; \epsilon\,.$$
Soit $\delta = \min(1; \delta')$. Pour $h \in]-\delta; \delta[\subset]-1; 1[$, on a, si $a + h \notin \mathcal{D}$, $|\eta(h)| = 0 < \epsilon$, et, si $a + h \in \mathcal{D}$, on a $h \in]-\delta'; \delta'[$ et, d'après ce qui précède, $|\eta(h)| < \epsilon$. On a montré 1. $\square$

Définition 6.2. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$ qui est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Lorsqu'une (donc toutes les) propriété(s) de la proposition 6.1 est (sont) vérifiée(s), on dit que f est dérivable en a et que ℓ est le nombre dérivé de f en a. On note ce dernier par $f'(a)$. La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée la tangente à f en a.*
Lorsque a est adhérent à $]a; +\infty[\cap \mathcal{D}$ et que l'une (donc toutes les) propriété(s) de la proposition 6.1 est (sont) vérifiée(s) avec f remplacée par sa restriction $f_{|[a;+\infty[\cap\mathcal{D}}$ à $[a; +\infty[\cap \mathcal{D}$, on dit que f est dérivable à droite en a et que ℓ est le nombre dérivée de f en a à droite. On note ce dernier par $f'_d(a)$. La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée la demi-tangente à f en a à droite.
Lorsque a est adhérent à $]-\infty; a[\cap \mathcal{D}$ et que l'une (donc toutes les) propriété(s) de la proposition 6.1 est (sont) vérifiée(s) avec f remplacée par sa restriction $f_{|]-\infty;a]\cap\mathcal{D}}$ à $]-\infty; a] \cap \mathcal{D}$, on dit que f est dérivable à gauche en a et que ℓ est le nombre dérivée de f en a à gauche. On note ce dernier par $f'_g(a)$. La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée la demi-tangente à f en a à gauche.
Soit $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$. On dit que f est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) sur $\mathcal{D}'$ si, pour tout $a \in \mathcal{D}'$, f est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) en a. Dans ce cas, la dérivée (resp. dérivée à droite, resp. dérivée à gauche) de f sur $\mathcal{D}'$ est la fonction $f' : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{K}$ (resp. $f'_d : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{K}$, resp. $f'_g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{K}$) qui, à $x \in \mathcal{D}'$ associe $f'(x)$ (resp. $f'_d(x)$, resp. $f'_g(x)$).

Remarque 6.3. *Dans le cadre de la définition 6.2, on suppose que f est dérivable en a. Pour $p \in \mathbb{K}$, soit $g_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $g_p(x) = f(a) + p(x - a)$. On a $g_p(a) = f(a)$. Le graphe de g_p est donc une droite non verticale qui passe par le point $(a; f(a))$. On a, pour $h \in U_0$ avec $a + h \in \mathcal{D}$,*
$$f(a+h) \,-\, g_p(a+h) \;=\; h \,\cdot\, \big(f'(a) \,-\, p \,+\, \eta(h)\big)\,.$$

Si $p = f'(a)$ *alors* $|f(a+h) - g_p(a+h)| \leq |h| \cdot |\eta(h)|$ *avec* h *et* $\eta(h)$ *tendant vers* 0 *quand* h *tend vers* 0.
Si $p \neq f'(a)$ *alors, comme* $\eta(h)$ *tend vers* 0 *quand* h *tend vers* 0, *il existe* $\delta > 0$ *tel que, pour* $h \in U_0 \cap]-\delta;\delta[$ *avec* $a+h \in \mathcal{D}$, *on ait*

$$|\eta(h)| \ < \ \frac{|p - f'(a)|}{2}\,.$$

Pour $h \in U_0 \cap]-\delta;\delta[$ *avec* $a+h \in \mathcal{D}$, *on a donc*

$$\big|f(a+h) - g_p(a+h)\big| \ \geq \ |h| \cdot \frac{|p - f'(a)|}{2}\,.$$

Le terme de droite tend certes vers 0 *en* 0 *mais comme* h, *donc "moins vite" que* $h\eta(h)$. *C'est dans ce sens que la tangente à* f *en* a *(i.e.* $g_{f'(a)}$*) est plus proche de* f *que les autres droites* g_p.

Voyons quelques exemples simples. Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$ tel que a soit adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Soit $c \in \mathbb{K}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ la fonction constante égale à c. Pour $h \in \mathbb{R}$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a $f(a+h) = c = f(a) = f(a) + h \cdot 0 + h \cdot \eta(h)$ où $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction nulle. Par le 1 de la proposition 6.1, f est dérivable en a de nombre dérivé 0. En particulier, si $\mathcal{D}$ est un intervalle, tout point a de $\mathcal{D}$ est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ donc f est dérivable sur $\mathcal{D}$ de dérivée nulle sur $\mathcal{D}$.
Vérifions que la fonction $\mathrm{Id} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{Id}(x) = x$ est dérivable en a de nombre dérivé 1. Pour $h \in \mathbb{R}$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a $\mathrm{Id}(a+h) = a+h = \mathrm{Id}(a) + h = \mathrm{Id}(a) + h \cdot 1 + h \cdot \eta(h)$ où $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction nulle. Par le 1 de la proposition 6.1, Id est dérivable en a de nombre dérivé 1. En particulier, si $\mathcal{D}$ est un intervalle, tout point a de $\mathcal{D}$ est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ donc Id est dérivable sur $\mathcal{D}$ de dérivée la fonction constante égale à 1 sur $\mathcal{D}$.

Proposition 6.4. *Soit* $\mathcal{D}$ *une partie non vide de* $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{D}$ *qui est adhérent à* $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. *Si* f *est dérivable en* a *alors* f *est continue en* a. *En particulier, si* f *est dérivable sur une partie* $\mathcal{D}'$ *de* $\mathcal{D}$ *alors elle est continue sur* $\mathcal{D}'$.

Remarque 6.5. *On a aussi une version "à droite" et une version "à gauche" de la proposition 6.4.*
Lorsque a *est adhérent à* $]a;+\infty[\cap\mathcal{D}$, *on peut appliquer la proposition 6.4 à la restriction* $f_{|[a;+\infty[\cap\mathcal{D}}$ *de* f *à* $[a;+\infty[\cap\mathcal{D}$. *Cela donne l'implication : si* f *est dérivable en* a *à droite alors* f *est continue en* a *à droite.*
Lorsque a *est adhérent à* $]-\infty;a]\cap\mathcal{D}$, *on peut appliquer la proposition 6.4 à la restriction* $f_{|]-\infty;a]\cap\mathcal{D}}$ *de* f *à* $]-\infty;a]\cap\mathcal{D}$. *Cela donne l'implication : si* f *est dérivable en* a *à gauche alors* f *est continue en* a *à gauche.*

Preuve de la proposition 6.4 : Par hypothèse, la propriété 1 de la proposition 6.1 est vraie. On sait que $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$ et, comme $\lim\limits_{h\to 0} \eta(h) = 0$, on a, par produit (cf. proposition 4.31), $\lim\limits_{h\to 0} h\eta(h) = 0$. Chacun des termes du membre de droite de l'égalité (6.1) a donc une limite en 0, à savoir $f(a)$, 0 et 0, respectivement. Par somme (cf. proposition 4.31), on en déduit que le membre de droite de (6.1) tend vers $f(a)$, ce qui démontre que f a une limite en a donc f est continue en a. $\square$

Attention : la réciproque est fausse. Une fonction continue en un point peut ne pas être dérivable en ce point. C'est ce qui se produit avec la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. On peut vérifier qu'elle est continue en 0, dérivable à droite en 0 de nombre dérivé à droite 1, dérivable à gauche en 0 de nombre dérivé à gauche -1, mais qu'elle n'est pas dérivable en 0.

Proposition 6.6. *Soit* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *deux parties de* $\mathbb{R}$ *telles que* $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ *soit une partie non vide de* $\mathbb{R}$. *Soit* $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$. *Soit* $f : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ *et* $g : \mathcal{D}_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ *deux fonctions dérivables sur* $\mathcal{D}'$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. *Alors les fonctions* $f+g$, $f \cdot g$ *et* λf *sont dérivables sur* $\mathcal{D}'$ *de dérivée* $f'+g'$, $f' \cdot g + f \cdot g'$ *et* $\lambda f'$, *respectivement.*
2. *Si, de plus,* f *ne s'annule pas sur* $\mathcal{D}'$, *alors* $1/f$ *est définie et dérivable sur* $\mathcal{D}'$, *de dérivée* $-f'/f^2$.

Preuve : Soit $a \in \mathcal{D}'$. Par hypothèse, on sait que le 1 de la proposition 6.1 est vrai pour f et pour g. Il existe donc un voisinage U_1 de 0 et une fonction $\eta_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $h \in U_1$ avec $a+h \in \mathcal{D}_1$, on ait (6.1) avec η remplacée par η_1, c'est-à-dire

$$f(a+h) \;=\; f(a) \,+\, h \cdot f'(a) \,+\, h \cdot \eta_1(h)\,. \tag{6.2}$$

Il existe un voisinage U_2 de 0 et une fonction $\eta_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $h \in U_2$ avec $a+h \in \mathcal{D}_2$, on ait (6.1) avec f remplacée par g et η remplacée par η_2, c'est-à-dire

$$g(a+h) \;=\; g(a) \,+\, h \cdot g'(a) \,+\, h \cdot \eta_2(h)\,. \tag{6.3}$$

Soit $U_0 = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de 0 (cf. proposition 2.6). Pour $h \in U_0$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a donc, par (6.2),

$$(\lambda \cdot f)(a+h) \;=\; (\lambda \cdot f)(a) \,+\, h \cdot \big(\lambda \cdot f'(a)\big) \,+\, h \cdot (\lambda \cdot \eta_1)(h)\,,$$

où la fonction $\lambda\eta_1$ tend vers 0 en 0 (cf. proposition 4.31). Donc λf est dérivable en a de nombre dérivée $\lambda f'(a)$.
Pour $h \in U_0$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a, par (6.2) et (6.3),

$$(f \,+\, g)(a+h) \;=\; (f \,+\, g)(a) \,+\, h \cdot \big(f'(a) \,+\, g'(a)\big) \,+\, h \cdot (\eta_1 \,+\, \eta_2)(h)\,,$$

où la fonction $\eta_1 + \eta_2$ tend vers 0 en 0 (cf. proposition 4.31). Donc $f+g$ est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)+g'(a)$.
Pour $h \in U_0$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a, par (6.2) et (6.3),

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(a+h) \;&=(f \cdot g)(a) \,+\, h \cdot \big(f'(a) \cdot g(a) \,+\, f(a) \cdot g'(a)\big)\\ &\quad + h \cdot \big(hf'(a)g'(a) \,+\, (g(a) \,+\, hg'(a))\eta_1(h) \,+\, (f(a) \,+\, hf'(a))\eta_2(h) \,+\, h\eta_1(h)\eta_2(h)\big)\,,\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{h\to 0} \big(hf'(a)g'(a) \,+\, (g(a) \,+\, hg'(a))\eta_1(h) \,+\, (f(a) \,+\, hf'(a))\eta_2(h) \,+\, h\eta_1(h)\eta_2(h)\big) \;=\; 0\,,$$

d'après la proposition 4.31. Donc fg est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
On suppose de plus que f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}'$. Donc f ne s'annule pas en a. Comme f est dérivable en a, elle est continue en a (cf. proposition 6.4). Donc, par le corollaire 4.28, on a

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) \;=\; \lim_{x\to a} f(x) \;=\; f(a) \;\neq\; 0\,.$$

Par la proposition 4.31, il existe un voisinage U_1' de a tel que $1/f$ soit définie sur $U_1' \cap \mathcal{D}_1$. Soit $U_0' = U_1' \cap U_1$. C'est un voisinage de 0 (cf. proposition 2.6). Pour $h \in U_0'$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a donc, par (6.2),

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f}\right)(a+h) \,-\, \left(\frac{1}{f}\right)(a) \;&=\; -\,\frac{f(a+h) \,-\, f(a)}{f(a+h)f(a)} \;=\; -h \cdot \frac{f'(a) \,+\, \eta_1(h)}{f(a+h)f(a)}\\[2ex] &=\; -\,h \cdot \big(f'(a) \,+\, \eta_1(h)\big) \cdot \frac{1}{f(a)}\left(\frac{1}{f(a)} \,+\, \frac{1}{f(a+h)} \,-\, \frac{1}{f(a)}\right)\\[2ex] &=\; -\,h \cdot \frac{f'(a)}{f(a)^2} \,-\, h \cdot \left(\frac{\eta_1(h)}{f(a)^2} \,+\, \frac{f'(a) \,+\, \eta_1(h)}{f(a)} \cdot \left(\frac{1}{f(a+h)} \,-\, \frac{1}{f(a)}\right)\right)\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{\eta_1(h)}{f(a)^2} \,+\, \frac{f'(a) \,+\, \eta_1(h)}{f(a)} \cdot \left(\frac{1}{f(a+h)} \,-\, \frac{1}{f(a)}\right)\right) \;=\; 0\,,$$

d'après la proposition 4.31. Donc $1/f$ est dérivable en a de nombre dérivé $-f'(a)/f(a)^2$. □

Dans le cadre de cette proposition 6.6, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}'$, $f/g = f \cdot (1/g)$ est dérivable sur $\mathcal{D}'$ et on obtient, pour $a \in \mathcal{D}'$,

$$(f/g)'(a) \;=\; f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} \;+\; f(a) \cdot \frac{-g'(a)}{g(a)^2} \;=\; \frac{f'(a)g(a) \;-\; f(a)g'(a)}{g(a)^2} \,.$$

On termine ce paragraphe par la composition.

Proposition 6.7. *Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux parties infinies de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_1$. Soit $f : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2$ une fonction réelle, qui est dérivable sur $\mathcal{D}'$, et $g : \mathcal{D}_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur l'image $f(\mathcal{D}')$ de $\mathcal{D}'$ par f. Alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathcal{D}'$ et, pour $a \in \mathcal{D}'$,*

$$(g \circ f)'(a) \;=\; g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a) \,. \tag{6.4}$$

Preuve : Soit $a \in \mathcal{D}'$. On montrer que $g \circ f$ est dérivable en a. Comme f est dérivable en a, il existe un voisinage U_1 de 0 et une fonction $\eta_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $h \in U_1$ avec $a + h \in \mathcal{D}_1$, on ait (6.1) avec η remplacée par η_1, c'est-à-dire (6.2). Comme $a \in \mathcal{D}'$, $f(a) \in f(\mathcal{D}')$ et, comme g est dérivable sur $f(\mathcal{D}')$, g est dérivable en $f(a)$. Il existe donc un voisinage U_2 de 0 et une fonction $\eta_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $k \in U_2$ avec $f(a) + k \in \mathcal{D}_2$, on ait (6.1) avec a remplacée par $f(a)$, f remplacée par g et η remplacée par η_2, c'est-à-dire

$$g\big(f(a) + k\big) \;=\; g\big(f(a)\big) \;+\; k \cdot g'\big(f(a)\big) \;+\; k \cdot \eta_2(k) \,. \tag{6.5}$$

Soit $V_2 = \{t \in \mathbb{R}; t - f(a) \in U_2\}$. C'est un voisinage de $f(a)$. Comme f est dérivable en a, elle y est continue (cf. proposition 6.4). Donc, par le corollaire 4.28, on a

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) \;=\; \lim_{x \to a} f(x) \;=\; f(a) \,.$$

Il existe donc un voisinage U_1' de 0 tel que, pour $h \in U_1'$ avec $a + h \in \mathcal{D}_1$, on ait $f(a + h) \in V_2$. Soit $U_1'' = U_1 \cap U_1'$. C'est un voisinage de a (cf. proposition 2.6).
Pour $h \in U_1''$ avec $a + h \in \mathcal{D}_1$, on a $h \in U_1'$ donc $f(a + h) \in V_2$ et $k := f(a + h) - f(a) \in U_2$. On a aussi $f(a + h) \in \mathcal{D}_2$. Donc, par (6.5),

$$g\big(f(a + h)\big) \;=\; g\big(f(a) + k\big) \;=\; g\big(f(a)\big) \;+\; k \cdot g'\big(f(a)\big) \;+\; k \cdot \eta_2(k) \,.$$

Comme $h \in U_1$ et $a + h \in \mathcal{D}_1$, on a, par (6.2),

$$\begin{aligned} g\big(f(a + h)\big) \;&= g\big(f(a)\big) \;+\; h \cdot \big(f'(a) \;+\; \eta_1(h)\big) \cdot g'\big(f(a)\big) \;+\; k \cdot \eta_2(k) \\ &= g\big(f(a)\big) \;+\; h \cdot f'(a) \cdot g'\big(f(a)\big) \;+\; h \cdot \Big(g'\big(f(a)\big)\eta_1(h) \;+\; \big(f'(a) \;+\; \eta_1(h)\big)\eta_2\big(f(a + h) - f(a)\big)\Big) \,. \end{aligned}$$

D'après les propositions 4.27 et 4.31,

$$\lim_{h \to 0} \Big(g'\big(f(a)\big)\eta_1(h) \;+\; \big(f'(a) \;+\; \eta_1(h)\big)\eta_2\big(f(a + h) - f(a)\big)\Big) \;=\; 0$$

donc $g \circ f$ est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a) \cdot g'\big(f(a)\big)$. □

6.2 Fonctions réelles dérivables et théorème des accroissements finis.

Dans ce paragraphe, on se penche sur les fonctions réelles dérivables. On s'intéresse aux extréma de telles fonctions. On montre ensuite le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis. On termine en justifiant le fait qu'une fonction dérivable de dérivée positive sur un intervalle est croissante sur cet intervalle.

Définition 6.8. *Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}$.*
On dit que f admet un maximum local en a s'il existe un voisinage U de a tel que $f(a)$ majore l'ensemble non vide $f(U \cap \mathcal{D}) = \{f(x); x \in U \cap \mathcal{D}\}$ (dans le sens de la définition 1.3). Dans ce cas, $f(a)$ est le maximum de $f(U \cap \mathcal{D})$ et est appelée valeur maximale locale de f.
On dit que f admet un minimum local en a s'il existe un voisinage U de a tel que $f(a)$ minore l'ensemble non vide $f(U \cap \mathcal{D}) = \{f(x); x \in U \cap \mathcal{D}\}$ (dans le sens de la définition 1.3). Dans ce cas, $f(a)$ est le minimum de $f(U \cap \mathcal{D})$ et est appelée valeur minimale locale de f.
Lorsque $f(a)$ majore $f(\mathcal{D})$, $f(a)$ est alors le maximum de $f(\mathcal{D})$ et on dit que f admet un maximum global en a. Dans ce cas, $f(a)$ est appelée valeur maximale de f.
Lorsque $f(a)$ minore $f(\mathcal{D})$, $f(a)$ est alors le minimum de $f(\mathcal{D})$ et on dit que f admet un minimum global en a. Dans ce cas, $f(a)$ est appelée valeur minimale de f.
On dif que f admet un extrémum (resp. extrémum local) en a si elle admet un maximum (resp. maximum local) en a ou bien si elle admet un minimum (resp. minimum local) en a.

On remarque qu'un extrémum global est aussi un extrémum local (il suffit de prendre $\mathbb{R}$ comme voisinage de a). La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ admet un minimum global en 0. Elle n'admet aucun maximum local. La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = |x|$ si $x \in [-1; 1]$ et $g(x) = -|x|$ si $x \notin [-1; 1]$. Elle admet un minimum local en 0 mais n'a pas de minimum global. Elle admet de maxima locaux : en 1 et -1. Ces deux maxima sont en fait globaux.

Voyons maintenant l'influence de la dérivabilité sur les extréma locaux.

Proposition 6.9. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f admet un extrémum local en $a \in I$ et si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.*

Attention : Si, dans cette proposition 6.9, l'intervalle n'est pas ouvert, le résultat peut être faux. C'est le cas pour la fonction $\mathrm{Id} : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in [0; 1]$, associe x. Elle est dérivable sur $[0; 1]$ de dérivée constante égale à 1 sur $[0; 1]$. Elle admet un minimum global en 0 mais on a $\mathrm{Id}'(0) = 1 \neq 0$.
Dans le cadre de la proposition 6.9, un point a qui vérifie $f'(a) = 0$ (on appelle cela un point critique de f), n'est pas forcément un extrémum de f. C'est le cas pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\mathbb{R} \ni x \mapsto 3x^2$. Le point 0 est un point critique de f puisque $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. Mais 0 n'est pas un extrémum local de f.

Preuve de la proposition 6.9 : Soit $a \in I$ un extrémum local de f. Comme I est un intervalle ouvert, a est adhérent aux ensembles $I_a^+ =]a; +\infty[\cap I$ et $I_a^- =]-\infty; a[\cap I$.

a). On suppose que a est un maximum local de f. Il existe donc un voisinage U de a tel que $f(a)$ majore $f(U \cap I)$. En particulier, pour $x \in U \cap I_a^+$, on a $x - a > 0$ et $f(x) \leq f(a)$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à droite en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), on obtient $f'(a) \leq 0$.
Comme $f(a)$ majore $f(U \cap I)$, on a aussi, pour $x \in U \cap I_a^-$, $x - a < 0$ et $f(x) \leq f(a)$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à gauche en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), on obtient $f'(a) \geq 0$.
Conclusion : $f'(a) = 0$.

b). On suppose que a est un minimum local de f. Il existe donc un voisinage U de a tel que $f(a)$ minore $f(U \cap I)$. En particulier, pour $x \in U \cap I_a^+$, on a $x - a > 0$ et $f(x) \geq f(a)$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à droite en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), on obtient $f'(a) \geq 0$.
Comme $f(a)$ minore $f(U \cap I)$, on a aussi, pour $x \in U \cap I_a^-$, $x - a < 0$ et $f(x) \geq f(a)$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à gauche en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), on obtient $f'(a) \leq 0$.
Conclusion : $f'(a) = 0$. □

Cette proposition 6.9 va nous permettre de démontrer un cas particulier du futur théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.12), à savoir :

Théorème 6.10. *Théorème de Rolle. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, et qui vérifie $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

En particulier, pour une fonction dérivable (donc continue), il existe un point critique entre de points prenant la même valeur par f. Pour préparer la preuve de ce théorème 6.10, on le montre dans un cas particulier.

Lemme 6.11. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, et qui vérifie $g(a) = g(b) = 0$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$.*

Preuve : Soit $m_+ = \sup g([a;b])$ et $m_- = \inf g([a;b])$. Comme g est continue, on sait, d'après le théorème 5.3, m_+ et m_- sont réelles et sont des valeurs de g. Comme $g(a) = 0$, on a $m_- \leq 0 \leq m_+$.

a). Cas où $m_- = 0 = m_+$. Par définition des bornes supérieure et inférieure, g est nulle. Sa dérivée est donc nulle aussi. Tout point $c \in]a;b[$ vérifie $g'(c) = 0$.

b). Cas où $0 < m_+$. Soit $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = m_+$. Comme $g(a) = 0 < m_+$ et $g(b) = 0 < m_+$, c est différent de a et de b, donc $c \in]a;b[$. De plus, g admet un maximum (local) en c et, comme g est dérivable sur $]a;b[$, g est dérivable en c. Par la proposition 6.9, $g'(c) = 0$.

c). Cas où $m_- < 0$. Soit $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = m_-$. Comme $g(a) = 0 > m_-$ et $g(b) = 0 > m_-$, c est différent de a et de b, donc $c \in]a;b[$. De plus, g admet un minimum (local) en c et, comme g est dérivable sur $]a;b[$, g est dérivable en c. Par la proposition 6.9, $g'(c) = 0$. □

Preuve du théorème 6.10 : Soit $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - f(a)$. Par hypothèse, f est continue sur $[a;b]$ et la fonction constante égale à $-f(a)$ y est aussi continue. Par somme (cf. proposition 4.31), g est continue sur $[a;b]$. Par hypothèse, f est dérivable sur $]a;b[$ et la fonction constante égale à $-f(a)$ y est aussi dérivable. Par somme (cf. proposition 6.6), g est dérivable sur $]a;b[$ et $g' = f' - 0 = f'$. De plus, comme $f(a) = f(b)$, on a $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ et $g(b) = f(b) - f(a) = 0$. Par le lemme 6.11, il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$. Comme $g' = f'$, on a aussi $f'(c) = 0$. □

On établit maintenant la généralisation suivante du théorème de Rolle.

Théorème 6.12. *Théorème des accroissements finis. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Si l'on applique ce théorème dans le cas où $f(a) = f(b)$, on trouve un point $c \in]a;b[$ tel que $f'(c)(b-a) = 0$. Comme $a \neq b$, on en déduit que $f'(c) = 0$, c'est-à-dire le résultat du théorème de Rolle.

Preuve du théorème 6.12 : Soit $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right) .$$

D'après la proposition 4.31, g est continue sur $[a;b]$. D'après la proposition 6.6, g est dérivable sur $]a;b[$ et, pour $x \in]a;b[$,

$$g'(x) \;=\; f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,.$$

De plus,

$$g(b) \;= f(b) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\cdot(b-a)\right) \;=\; f(b) - \big(f(a) + f(b) - f(a)\big) \;=\; 0\,,$$
$$g(a) \;= f(a) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\cdot(a-a)\right) \;=\; f(a) - f(a) \;=\; 0\,.$$

Par le théorème de Rolle (cf. théorème 6.10) appliqué à g, il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a donc

$$0 \;=\; f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

et donc $(b-a)f'(c) = f(b) - f(a)$. □

On peut maitenant démontrer le résultat suivant qui permet de dresser le tableau de variations d'une fonction dérivable lorsqu'on connait le signe de sa dérivée.

Corollaire 6.13. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ (en particulier $\inf I < \sup I$). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, qui est dérivable sur $]\inf I;\sup I[$.*

1. *Si f' est positive sur $]\inf I;\sup I[$ alors f est croissante sur I.*
2. *Si f' est strictement positive sur $]\inf I;\sup I[$ alors f est strictement croissante sur I.*
3. *Si f' est négative sur $]\inf I;\sup I[$ alors f est décroissante sur I.*
4. *Si f' est strictement négative sur $]\inf I;\sup I[$ alors f est strictement décroissante sur I.*
5. *Si f' est nulle sur $]\inf I;\sup I[$ alors f est constante sur I.*

Remarque 6.14. *Insistons sur ce que dit ce résultat.*
Si, par exemple, $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, dérivable sur $]a;b[$ de dérivée positive, alors f est croissante sur $[a;b]$. En particulier, pour $x \in [a;b]$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, même si $f'(a)$ n'est pas défini, même si $f'(b)$ n'est pas défini.
Si, par exemple, $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, dérivable sur $]a;b[$ de dérivée strictement positive, alors f est strictement croissante sur $[a;b]$. En particulier, pour $x \in]a;b[$, $f(a) < f(x) < f(b)$.
Pour dresser le tableau de variations d'une fonction dérivable, on utilise souvent ce corollaire 6.13 en conjonction avec le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1) ou son corollaire (cf. corollaire 5.2) ou encore avec le théorème de Heine (cf. théorème 5.3).

Preuve du corollaire 6.13 : Soit $(x_-;x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$. Par hypothèse, on sait que f est continue sur $[x_-;x_+]$, dérivable sur $]x_-;x_+[$, donc, par le théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.12), il existe $c \in]x_-;x_+[$, tel que $f(x_+) - f(x_-) = f'(c)(x_+ - x_-)$. On a $c \in]\inf I;\sup I[$.

1. On suppose que f' est positive sur $]\inf I;\sup I[$. Donc $f'(c) \geq 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) \geq f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-;x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ et aussi lorsque $x_+ = x_-$. Donc f est croissante sur I.
2. On suppose que f' est strictement positive sur $]\inf I;\sup I[$. Donc $f'(c) > 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) > f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-;x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ donc f est strictement croissante sur I.
3. On suppose que f' est négative sur $]\inf I;\sup I[$. Donc $f'(c) \leq 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) \leq f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-;x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ et aussi lorsque $x_+ = x_-$. Donc f est décroissante sur I.
4. On suppose que f' est strictement négative sur $]\inf I;\sup I[$. Donc $f'(c) < 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) < f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-;x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ donc f est strictement décroissante sur I.
5. On suppose que f' est nulle sur $]\inf I;\sup I[$. Donc $f'(c) = 0$ et $f(x_+) = f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-;x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ donc f est constante sur I. □

6.3 Classes de fonctions.

On se place de nouveau dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On introduit des classes de régularité pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

6.3.1 Classes C^0 et C^1.

Définition 6.15. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté par $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$.*

Proposition 6.16. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.*
L'ensemble $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^{\mathcal{D}};+;\cdot)$. En particulier, si $(f;g) \in (C^0(\mathcal{D};\mathbb{K}))^2$ alors $f+g \in C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$ et, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f \in C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$.
Pour $(f;g) \in (C^0(\mathcal{D};\mathbb{K}))^2$, le produit fg appartient à $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$.
Si $f \in C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$ et f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, alors $(1/f)$ est bien définie sur $\mathcal{D}$ et $(1/f) \in C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$.
Si $\mathcal{D}'$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $h : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$ avec $h \in C^0(\mathcal{D}';\mathbb{K})$, et si $g \in C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$, alors $g \circ h$, la composée de g par h appartient à $C^0(\mathcal{D}';\mathbb{K})$.

Preuve : On a vu que la fonction nulle sur $\mathcal{D}$ est continue. Elle appartient donc à $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$. D'après la proposition 4.31, la somme de deux éléments de $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$ est encore dans $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$, le produit d'un scalaire de $\mathbb{K}$ par un élément de $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$ est encore dans $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$. Donc $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$.
Les deux propriétés suivantes sont une reformulation du 5 de la proposition 4.31.
Le dernier résultat est une conséquence immédiate de la proposition 4.27. □

Définition 6.17. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions, à valeurs dans $\mathbb{K}$, définies et dérivables sur $\mathcal{D}$, dont la dérivée est continue sur $\mathcal{D}$, est noté par $C^1(\mathcal{D};\mathbb{K})$.*

Proposition 6.18. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$.*
L'ensemble $C^1(I;\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. En particulier, si $(f;g) \in (C^1(I;\mathbb{K}))^2$ alors $f+g \in C^1(I;\mathbb{K})$ et, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f \in C^1(I;\mathbb{K})$.
On a l'inclusion $C^1(I;\mathbb{K}) \subset C^0(I;\mathbb{K})$.
Pour $(f;g) \in (C^1(I;\mathbb{K}))^2$, le produit fg appartient à $C^1(I;\mathbb{K})$.
Si $f \in C^1(I;\mathbb{K})$ et f ne s'annule pas sur I, alors $(1/f)$ est bien définie sur I et $(1/f) \in C^1(I;\mathbb{K})$.
Si I' un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $h : I' \longrightarrow I$ avec $h \in C^1(I';\mathbb{K})$, et si $g \in C^1(I;\mathbb{K})$, alors $g \circ h$, la composée de g par h appartient à $C^1(I';\mathbb{K})$.

Preuve : On a vu que la fonction nulle sur I est dérivable sur I de dérivée nulle, donc continue sur I. Elle appartient donc à $C^1(I;\mathbb{K})$. D'après la proposition 6.6, la somme de deux éléments de $C^1(I;\mathbb{K})$ est encore dans $C^1(I;\mathbb{K})$, le produit d'un scalaire de $\mathbb{K}$ par un élément de $C^1(I;\mathbb{K})$ est encore dans $C^1(I;\mathbb{K})$. Donc $C^1(I;\mathbb{K})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.
Soit $g \in C^1(I;\mathbb{K})$. Par définition, g est donc dérivable sur I. D'après la proposition 6.4, g est continue sur I donc $g \in C^0(I;\mathbb{K})$. On a bien $C^1(I;\mathbb{K}) \subset C^0(I;\mathbb{K})$.
Soit $(f;g) \in (C^1(I;\mathbb{K}))^2$. D'après la proposition 6.6, fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$. Par définition de $C^1(I;\mathbb{K})$, $f' \in C^0(I;\mathbb{K})$ et $g' \in C^0(I;\mathbb{K})$. D'après $C^1(I;\mathbb{K}) \subset C^0(I;\mathbb{K})$, $f \in C^0(I;\mathbb{K})$ et $g \in C^0(I;\mathbb{K})$. Par la proposition 6.16, $f'g + fg' \in C^0(I;\mathbb{K})$ donc $(fg)' \in C^0(I;\mathbb{K})$. On a montré que $(fg) \in C^1(I;\mathbb{K})$.
Soit $f \in C^1(I;\mathbb{K})$ telle que f ne s'annule pas sur I. D'après la proposition 6.6, $1/f$ est dérivable sur I et $(1/f)' = -f'/f^2$. On a $f' \in C^0(I;\mathbb{K})$ et, d'après $C^1(I;\mathbb{K}) \subset C^0(I;\mathbb{K})$, $f \in C^0(I;\mathbb{K})$. Par la proposition 6.16, $-f'/f^2 \in C^0(I;\mathbb{K})$ soit $(1/f)' \in C^0(I;\mathbb{K})$. On a montré que $(1/f) \in C^1(I;\mathbb{K})$.
Soit $h : I' \longrightarrow I$ de classe C^1 sur I' et $g \in C^1(I;\mathbb{K})$. Par la proposition 6.7, $g \circ h$ est dérivable et $(g \circ h)' = (g' \circ h) \cdot h'$. Par hypothèse, on a $g' \in C^0(I;\mathbb{K})$ et $h' \in C^0(I';\mathbb{K})$. Comme $C^1(I';\mathbb{K}) \subset C^0(I';\mathbb{K})$,

$h \in C^0(I';\mathbb{K})$. Par la proposition 6.16, $(g' \circ h) \cdot h' \in C^0(I';\mathbb{K})$ donc $(g \circ h)' \in C^0(I';\mathbb{K})$. On a montré que $(g \circ h) \in C^1(I';\mathbb{K})$. □

Voici une famille d'exemples de fonctions de classe C^1.

Définition 6.19. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par, pour $x \in I$, $f_n(x) = x^n$. On a $f_n \in \mathbb{K}^I$. On note par $P(I;\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$ engendrée par la famille $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$. C'est l'espace des fonctions polynômiales sur I à coefficients dans $\mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

On rappelle que $P(I;\mathbb{K})$ est le plus petit $\mathbb{K}$-espace vectoriel contenant l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$. Comme $\mathbb{K}^I$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel contenant l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$, $P(I;\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. Un élément de $P(I;\mathbb{K})$ est donc une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $(i_1; \cdots; i_p) \in \mathbb{N}^p$, $(\lambda_1; \cdots; \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \ = \ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot f_{i_k}(x) \, .$$

Si $d = \max\{i_k; k \in [\![1;p]\!]\}$, on peut trouver $(a_0; \cdots; a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tel que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot f_k(x) \ = \ \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot x^k \, .$$

Proposition 6.20. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $P(I;\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I;\mathbb{K})$ (et donc aussi de $C^0(I;\mathbb{K})$). De plus, $f_0' = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n' = nf_{n-1}$.*

Preuve : Comme la fonction f_0 est la fonction constante égale à 1 sur I et comme on a vu qu'une fonction constante sur un intervalle est C^1 sur cet intervalle de dérivée nulle, $f_0 \in C^1(I;\mathbb{K})$ et $f_0' = 0$. Comme f_1 est la fonction identité sur I, elle y est dérivable de dérivée constante égale à 1 donc elle est aussi de classe C^1 sur I de $f_1' = f_0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) = (f_n \in C^1(I;\mathbb{K}) \,\text{et}\, f_n' = nf_{n-1})$. Comme $f_1 \in C^1(I;\mathbb{K})$ et $f_1' = f_0 = 1 \cdot f_0$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_{n+1} = f_1 \cdot f_n$, comme $f_1 \in C^1(I;\mathbb{K})$, comme $f_n \in C^1(I;\mathbb{K})$ par hypothèse de récurrence, on déduit de la proposition 6.6 que $f_{n+1} \in C^1(I;\mathbb{K})$ et que

$$f_{n+1}' \ = \ f_1' \cdot f_n \ + \ f_1 \cdot f_n' \ = \ f_n \ + \ n \cdot f_1 \cdot f_{n-1} \ = \ (n+1) \cdot f_n \, .$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $C^1(I;\mathbb{K})$ contient donc l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$. Par définition de $P(I;\mathbb{K})$, $P(I;\mathbb{K})$ est donc un sous-espace vectoriel de $C^1(I;\mathbb{K})$. □.

6.3.2 Classes C^N avec $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

On introduit maintenant des classes de régularités supérieures à C^1. Pour un intervalle non réduit à un point I de $\mathbb{R}$, on va construire par récurrence une suite $(C^n(I;\mathbb{K}))_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels de $C^0(I;\mathbb{K})$. En particulier, on retrouvera l'espace $C^1(I;\mathbb{K})$ introduit dans le paragraphe précédent.

Proposition 6.21. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Il existe une unique suite $C = (C^n(I;\mathbb{K}))_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels de $C^0(I;\mathbb{K})$, de premier terme $C^0(I;\mathbb{K})$ et vérifiant la relation de récurrence :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \, , \quad C^n(I;\mathbb{K}) \ = \ \big\{ f \in \mathbb{K}^I \, ; \ f \ \textit{est dérivable et} \ f' \in C^{n-1}(I;\mathbb{K}) \big\} \, . \tag{6.6}$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n. On note par $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de C^0. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante :
Il existe une unique application $v^{(n)} : [\![0;n]\!] \longrightarrow \mathcal{S}$ avec $v^{(n)}(0) = C^0$ et, pour $p \in [\![0;n-1]\!]$,

$$v^{(n)}(p+1) \;=\; \left\{f \in \mathbb{K}^I \,;\; f \text{ est dérivable et } f' \in v^{(n)}(p)\right\}. \tag{6.7}$$

Soit $v^{(1)} : [\![0;1]\!] \longrightarrow \mathcal{S}$ donnée par $v^{(n)}(0) = C^0$ et $v^{(1)}(0) = C^1$. Par la définition 6.17, (6.7) est valide pour $p = 0$ et $n = 1$. De plus, c'est la seule application vérifiant les contraintes imposées pas $\mathcal{P}(1)$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $v^{(n+1)} : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow \mathcal{S}$ l'application dont la restriction à $[\![0;n]\!]$ est $v^{(n)}$, l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$, et dont la valeur en $n+1$ est

$$v^{(n+1)}(n+1) \;=\; \left\{f \in \mathbb{K}^I \,;\; f \text{ est dérivable et } f' \in v^{(n)}(n)\right\}. \tag{6.8}$$

On a $v^{(n+1)}(0) = v^{(n)}(0) = C^0$. Pour $p \in [\![0;n-1]\!]$, (6.7) est valide par hypothèse de récurrence donc elle est aussi valide pour n remplacé par $n+1$, puisque $v^{(n+1)}$ coïncide avec $v^{(n)}$ sur $[\![0;n]\!]$. Comme $v^{(n+1)}(n) = v^{(n)}(n)$, (6.8) donne (6.7) avec n remplacé par $n+1$ et pour $p = n$. Donc $v^{(n+1)}$ satisfait les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n+1)$.
Si $w : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow \mathcal{S}$ vérifie ces contraintes alors sa restriction à $[\![0;n]\!]$ vérifient celles imposées dans $\mathcal{P}(n)$ donc $w_{|[\![0;n]\!]} = v^{(n)}$. De plus,

$$w(n+1) \;=\; \left\{f \in \mathbb{K}^I \,;\; f \text{ est dérivable et } f' \in w(n)\right\} \;=\; \left\{f \in \mathbb{K}^I \,;\; f \text{ est dérivable et } f' \in v^{(n)}(n)\right\}$$

qui vaut $v^{(n)}(n+1)$, d'après (6.8), donc $w = v^{(n+1)}$. On a montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $m \geq n$, la restriction à $[\![0;n]\!]$ de l'application $v^{(m)}$, fournie par $\mathcal{P}(m)$, vérifie les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n)$ donc $v^{(m)}_{|[\![0;n]\!]} = v^{(n)}$, l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$.
Soit $C : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ définie par $C(0) := C^0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $C^n := C(n) := v^{(n)}(n)$, où $v^{(n)}$ est l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après (6.7) avec n remplacé par $n+1$ et $p = n$,

$$C^{n+1} \;=\; v^{(n+1)}(n+1) \;=\; \left\{f \in \mathbb{K}^I \,;\; f \text{ est dérivable et } f' \in C^n\right\}$$

puisque $v^{(n+1)}$ et $v^{(n)}$ coïncident en n. Donc C vérifie la relation de récurrence (6.6).
Il reste à vérifier l'unicité de la suite C. Soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant $v_0 = C^0$ et (6.6) avec C^n remplacée par v_n. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{Q}(n) = (C^n = v_n)$. Comme $C^0 = v_0$, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie, pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc $C^n = v_n$ donc, d'après (6.6) et (6.6) avec C remplacée par v, on obtient $C^{n+1} = v_{n+1}$. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $v = C$. $\square$

On note que la définition de $C^1(I;\mathbb{K})$ donnée par cette proposition 6.21 est identique à celle donnée dans la définition 6.17 avec $\mathcal{D} = I$. On montre que la suite $(C^n(I;\mathbb{K}))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Proposition 6.22. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. La suite $C = (C^n(I;\mathbb{K}))_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels de $C^0(I;\mathbb{K})$, de premier terme $C^0(I;\mathbb{K})$ et vérifiant la relation de récurrence* (6.6) *est décroissante, i.e.*

$$\forall\,(m;n) \in \mathbb{N}^2\,, \quad \left(m \geq n \implies C^m(I;\mathbb{K}) \;\subset\; C^n(I;\mathbb{K})\right). \tag{6.9}$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n) = (C^{n+1} \subset C^n)$.
Par la proposition 6.18, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in C^{n+2}$. Par définition, f est dérivable et $f' \in C^{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, $f' \in C^n$. Comme f est dérivable et $f' \in C^n$, $f \in C^{n+1}$, par définition de C^{n+1}. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour prouver (6.9), on montre par récurrence la proposition $\mathcal{Q}(q)$ donnée, pour $q \in \mathbb{N}$, par

$$\mathcal{Q}(q) \;=\; \big(\forall p \in \mathbb{N}\,, \quad C^{p+q} \subset C^{p}\big)\,.$$

$\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(q)$ soit vraie pour un $q \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à $p+1$, on a $C^{p+q+1} = C^{(p+1)+q} \subset C^{p+1}$. D'après $\mathcal{P}(p)$, $C^{p+1} \subset C^{p}$. Donc $C^{p+q+1} \subset C^{p}$. Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(q+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.
Soit $(m;n) \in [\![n_0;+\infty[\![^2$ avec $m \geq n$. Comme $\mathcal{Q}(m-n)$ est vraie, on a $C^m = C^{n+(m-n)} \subset C^n$. On a montré (6.9). □

Définition 6.23. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. On pose*

$$C^{\infty}(I;\mathbb{K}) \;:=\; \bigcap_{k=0}^{\infty} C^{k}(I;\mathbb{K})\,.$$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est (de classe) C^n sur I si $f \in C^n(I;\mathbb{K})$.
On dit que f est (de classe) C^∞ sur I si $f \in C^\infty(I;\mathbb{K})$.

Remarque 6.24. *Étant donné que tous les $C^n(I;\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $C^0(I;\mathbb{K})$, on peut vérifier que $C^\infty(I;\mathbb{K})$ est aussi un sous-espace vectoriel de $C^0(I;\mathbb{K})$.*
De plus, (6.6) *est encore valable pour n remplacé par $+\infty$:*

$$C^{\infty}(I;\mathbb{K}) \;=\; \big\{f \in \mathbb{K}^I\,;\; f \text{ est dérivable et } f' \in C^{\infty}(I;\mathbb{K})\big\}\,. \tag{6.10}$$

Pour une fonction $f \in C^N(I;\mathbb{K})$ avec $N \in (\mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$, on voudrait définir la suite (éventuellement finie) de ses dérivées successives, tant qu'elles existent : dérivée (première), dérivée seconde = dérivée de la dérivée, dérivée troisième = dérivée de la dérivée de la dérivée, etc .... Afin d'inclure le cas $N = 0$, on décide qu'une fonction est aussi sa dérivée 0ième. On va procéder par récurrence. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 6.25. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ et $f \in C^N(I;\mathbb{K})$. Soit $D_N := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N\}$. Il existe une unique application $d : D_N \longrightarrow C^0(I;\mathbb{K})$ telle que $d(0) = f$ et*

$$\forall\, n \in \big(\mathbb{N}^* \cap D_N\big)\,, \quad \Big(d(n) \;=\; \big(d(n-1)\big)' \quad \text{et} \quad d(n) \,\in\, C^{N-n}(I;\mathbb{K})\Big)\,, \tag{6.11}$$

avec la convention selon laquelle, pour $n \in \mathbb{N}$, $\infty - n = \infty$. Ici "$(g)'$" désigne la dérivée de g.

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n. On fixe $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la propriété

$$\mathcal{P}(n) \;:=\; \Big((n > N) \quad \text{ou} \quad \big((n \leq N) \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}(n)\big)\Big)\,,$$

où $\mathcal{Q}(n)$ est la proposition suivante :
Il existe une unique application $d^{(n)} : [\![0;n]\!] \longrightarrow C^{N-n}$ telle que $d^{(n)}(0) = f$ et, pour $p \in [\![0;n[\![$, on a $d^{(n)}(p+1) = (d^{(n)}(p))'$ et $d^{(n)}(p+1) \in C^{N-(p+1)}$.
Vérifions la cohérence de cette proposition $\mathcal{Q}(n)$ dans le cas $n \leq N < \infty$. Si $p \in \mathbb{N}$ et $0 \leq p < n \leq N$, on a $C^{N-(p+1)} \subset C^{N-n}$ par (6.9).
Vérifions la cohérence de cette proposition $\mathcal{Q}(n)$ dans le cas $n \leq N = \infty$. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $0 \leq p < n$, on a $C^{N-(p+1)} = C^{N-n} = C^\infty$.
Si $N = 0$ alors $\mathcal{P}(1)$ est vraie car la proposition $(1 > 0)$ l'est. Pour $N \geq 1$, on sait que f est dérivable et $f' \in C^0$ donc l'application $d^{(1)} : [\![0;n]\!] \longrightarrow C^{N-1}$ donnée par $d^{(1)}(0) = f \in C^N \subset C^{N-1}$ (cf. (6.9)) et $d^{(1)}(1) = f' \in C^{N-1}$ (cf. (6.6) et (6.10)) est la seule à vérifier les conditions imposées dans $\mathcal{P}(1)$. Donc

$\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n+1 > N$, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Supposons maintenant que $n+1 \leq N$. En particulier, $n \leq N$ et, par l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Soit $d^{(n+1)} : [\![0; n+1]\!] \longrightarrow C^{N-n-1}$ l'application dont la restriction à $[\![0; n]\!]$ est $d^{(n)}$, l'application fournie par $\mathcal{Q}(n)$, et dont la valeur en $n+1$ est : $d^{(n+1)}(n+1) = (d^{(n)}(n))' \in C^{N-n-1}$. On vérifie que $d^{(n+1)}$ satisfait les conditions imposées dans $\mathcal{Q}(n+1)$.
On a $d^{(n+1)}(0) = d^{(n)}(0) = f$. Pour $p \in [\![0; n[\![$, on a bien $d^{(n+1)}(p+1) = (d^{(n)}(p))' = (d^{(n+1)}(p))'$ et $d^{(n+1)}(p+1) \in C^{N-(p+1)}$, par l'hypothèse de récurrence, puisque $d^{(n+1)}$ coïncide avec $d^{(n)}$ sur $[\![0; n]\!]$. De plus, par la définition choisie de $d^{(n+1)}(n+1)$, on a encore, pour $p = n$, $d^{(n+1)}(p+1) = (d^{(n+1)}(p))'$ et $d^{(n+1)}(p+1) \in C^{N-(p+1)}$.
Soit $w : [\![0; n+1]\!] \longrightarrow C^{N-n-1}$ une application vérifiant les conditions imposées dans $\mathcal{Q}(n+1)$. La restriction de w à $[\![0; n]\!]$ vérifie les conditions imposées par $\mathcal{Q}(n)$ donc $w_{|[\![0;n]\!]} = d^{(n)}$. De plus, $w(n+1) = (w(n))' = (d^{(n)}(n))' = d^{(n+1)}(n+1)$. Donc $w = d^{(n+1)}$. On a montré $\mathcal{Q}(n+1)$.
On a donc montré $\mathcal{P}(n+1)$.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $N \geq m \geq n$, la restriction à $[\![0; n]\!]$ de l'application $d^{(m)}$, fournie par $\mathcal{P}(m)$, vérifie les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n)$ donc $d^{(m)}_{|[\![0;n]\!]} = d^{(n)}$, l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$.
Soit $d : D_N \longrightarrow C^0$ définie par $d(0) = f$ et, pour $n \in D_N \cap \mathbb{N}^*$, $d(n) := d^{(n)}(n)$. En appliquant $\mathcal{P}(n)$, pour tout $n \in D_N \cap \mathbb{N}^*$, on obtient (6.11).
Il reste à vérifier l'unicité de la suite d. Soit $v : D_N \longrightarrow C^0$ vérifiant (6.11) avec d remplacée par v. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{Q}(n) = (d(n) = v_n)$. Comme $d(0) = f = v_0$, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie, pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc $d(n) = v_n$ donc, d'après (6.11) et (6.11) avec d remplacée par v, on obtient $d(n+1) = v_{n+1}$. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $v = d$. □

Définition 6.26. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ et $f \in C^N(I; \mathbb{K})$. Soit $D_N := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N\}$. Pour $n \in D_N$, on appelle dérivée nième de f sur I la fonction $d(n) \in C^{N-n}(I; \mathbb{K})$ construite dans la proposition 6.25. On la note $f^{(n)}$.*
On a donc $f^{(0)} = f$ et

$$\forall\, n \in \left(\mathbb{N}^* \cap D_N\right), \quad \left(f^{(n)} \; = \; \left(f^{(n-1)}\right)' \quad et \quad f^{(n)} \; \in \; C^{N-n}(I; \mathbb{K})\right), \tag{6.12}$$

Il est commode de pouvoir repérer les fonctions de classe C^k sur I (pour un $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) en appliquant successivement l'opération de dérivation en partant de f. C'est ce que donne le résultat suivant.

Proposition 6.27. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On considère les propositions*

$$\mathcal{D}(p) \; := \; \Big(\exists\, (g_0; \cdots; g_{p-1}; g_p) \in \left(C^1(I; \mathbb{K})\right)^p \times C^0(I; \mathbb{K})\, ; \; \left(g_0 \; = \; f\right) \; et \; \left(\forall j \in [\![0; p-1]\!]\, , \; g_j' \; = \; g_{j+1}\right)\Big)$$

et

$$\mathcal{E}(p) \; := \; \Big(\left(f \in C^p(I; \mathbb{K})\right) \quad et \quad \left(\forall j \in [\![0; p]\!]\, , \; f^{(j)} = g_j\right)\Big)\, .$$

On a l'implication : $(\mathcal{D}(p) \Longrightarrow \mathcal{E}(p))$.

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I; \mathbb{K})$ par C^n. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ soit $\mathcal{P}(p) = (\forall f \in \mathbb{K}^I, \mathcal{D}(p) \Longrightarrow \mathcal{E}(p))$.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$. Supposons $\mathcal{D}(1)$ vraie. Il existe donc $g_0 \in C^1$ et $g_1 = g_0' \in C^0$. De plus $f = g_0$. Donc f est dérivable et $f' = g_1 \in C^0$. Par (6.6) avec $n = 1$, $f \in C^1$ et $\mathcal{E}(1)$ est vraie. On a montré $\mathcal{P}(1)$.
Supposons $\mathcal{P}(p)$ pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathbb{K}^I$. On suppose $\mathcal{D}(p+1)$ vraie. Il existe donc $(g_0; \cdots; g_p) \in (C^1)^p$ et $g_{p+1} \in C^0$ telles que $g_0 = f$ et, pour $j \in [\![0; p]\!]$, $g_j' = g_{j+1}$. Comme $C^1 \subset C^0$, $\mathcal{D}(p)$ vraie. Par l'hypothèse de récurrence, $f \in C^p$ et, pour $j \in [\![0; p]\!]$, $f^{(j)} = g_j$. Donc $f' = g_1$ et, en prenant les fonctions $g_1; \cdots; g_{p+1}$, on voit que $\mathcal{D}(p)$ est vraie avec f remplacée par f'. Par l'hypothèse de récurrence avec f remplacée par

f', $f' \in C^p$. Par (6.6), $f \in C^{p+1}$. De plus, $f^{(p+1)} = (f^{(p)})' = (g_p)' = g_{p+1}$. On a montré $\mathcal{E}(p+1)$.
Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et toute $f \in \mathbb{K}^I$, l'implication $(\mathcal{D}(p) \Longrightarrow \mathcal{E}(p))$ est vraie. $\square$

Pour une fonction $f \in C^\infty(I;\mathbb{K})$, par exemple, on obtient donc ses dérivées de proche en proche : $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = (f')'$ notée aussi f'', $f^{(3)} = ((f')')' = (f'')'$, etc ... On vérifie que $f^{(3)}$ est aussi $(f')^{(2)}$. On va voir que c'est un fait général.

Proposition 6.28. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $(p;q) \in \mathbb{N}^2$. On considère les propositions $\mathcal{P}(1) = (f \in C^p(I;\mathbb{K})$ et $f^{(p)} \in C^q(I;\mathbb{K}))$, $\mathcal{P}(2) = (f \in C^{p+q}(I;\mathbb{K}))$ et*

$$\mathcal{P}(3) = \big(f \in C^p(I;\mathbb{K}) \text{ et } f^{(p)} \in C^q(I;\mathbb{K}) \text{ et } (f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}\big)\,.$$

On a les implications : $\mathcal{P}(1) \Longrightarrow \mathcal{P}(2) \Longrightarrow \mathcal{P}(3)$.
Comme $\mathcal{P}(3)$ implique $\mathcal{P}(1)$, on a $\mathcal{P}(1) \Longleftrightarrow \mathcal{P}(2)$ et, quand l'une des deux propositions est vraie, les deux sont vraies et on a $(f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}$.

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n. Pour $q \in \mathbb{N}$ soit

$$\mathcal{Q}(q) \;:=\; \Big(\forall\, f \in \mathbb{K}^I\,,\, \forall\, p \in \mathbb{N}\,, \quad \big(\mathcal{P}(1) \Longrightarrow \mathcal{P}(2)\big) \quad \text{et} \quad \big(\mathcal{P}(2) \Longrightarrow \mathcal{P}(3)\big)\Big)\,.$$

Pour $q = 0$, l'implication $\big(\mathcal{P}(1) \Longrightarrow \mathcal{P}(2)\big)$ s'écrit

$$\big(f \in C^p \text{ et } f^{(p)} \in C^0\big) \;\Longrightarrow\; \big(f \in C^{p+0}\big)\,.$$

Elle est vraie. Toujours pour $q = 0$, l'implication $\big(\mathcal{P}(2) \Longrightarrow \mathcal{P}(3)\big)$ s'écrit

$$\big(f \in C^{p+0}\big) \;\Longrightarrow\; \big(f \in C^p \text{ et } f^{(p)} \in C^0 \text{ et } (f^{(p)})^{(0)} = f^{(p+0)}\big)\,.$$

Elle est aussi vraie, d'après la proposition 6.25. Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{Q}(q)$ vraie pour un $q \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}$.
On montre l'implication $\big(\mathcal{P}(1) \Longrightarrow \mathcal{P}(2)\big)$ avec q remplacé par $q+1$. On suppose $f \in C^p$ et $f^{(p)} \in C^{q+1}$. Par (6.6) avec $n = q+1$, $f^{(p)}$ est dérivable et $(f^{(p)})' \in C^q$. En prenant les fonctions $g_j = f^{(j)} \in C^1$, pour $j \in [\![0;p]\!]$, et $g_{p+1} = (f^{(p)})' \in C^0$, la proposition $\mathcal{D}(p+1)$ de proposition 6.27 est vraie. On obtient donc, par cette proposition 6.27, que $f \in C^{p+1}$. Comme $f' = f^{(1)} = g_1$ et $\mathcal{D}(p+1)$ est vraie, la proposition $\mathcal{D}(p)$, avec f remplacée par f' et $(g_0;\cdots;g_p)$ remplacé par $(g_1;\cdots;g_{p+1})$, est vraie. Donc, encore par la proposition 6.27, $f' \in C^p$ et $(f')^{(p)} = g_{p+1} = (f^{(p)})' \in C^q$. Par l'hypothèse de récurrence pour f', on a $f' \in C^{p+q}$. Par définition de C^{p+q+1} (cf. (6.6)), on obtient $f \in C^{p+q+1}$. On a montré $\big(\mathcal{P}(1) \Longrightarrow \mathcal{P}(2)\big)$ avec q remplacé par $q+1$.
On montre l'implication $\big(\mathcal{P}(2) \Longrightarrow \mathcal{P}(3)\big)$ avec q remplacé par $q+1$. On suppose que $f \in C^{p+(q+1)}$. Comme $f \in C^{(p+1)+q}$, on sait, par la seconde implication de $\mathcal{Q}(q)$, que $f \in C^{p+1}$ et $f^{(p+1)} \in C^q$ et $(f^{(p+1)})^{(q)} = f^{((p+1)+q)}$. Donc $f^{(p)}$ est dérivable et $(f^{(p)})' = f^{(p+1)} \in C^q$. Par (6.6) avec $n = q+1$, $f^{(p)} \in C^{q+1}$. De plus,

$$f^{(p+(q+1))} \;=\; f^{((p+1)+q)} \;=\; \big(f^{(p+1)}\big)^{(q)} \;=\; \Big(\big(f^{(p)}\big)'\Big)^{(q)} \;=\; \big(f^{(p)}\big)^{(q+1)}$$

d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{Q}(q)$ appliquée à $f^{(p)}$. On a montré $\big(\mathcal{P}(2) \Longrightarrow \mathcal{P}(3)\big)$ avec q remplacé par $q+1$.
Donc $\mathcal{Q}(q+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$. $\square$

Comme les ensembles $C^N(I;\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^I$, on sait que la somme de deux fonctions de classe C^N est de classe C^N et le produit d'une fonction de classe C^N par un élément de $\mathbb{K}$ est aussi de classe C^N. Qu'en est-il d'autres opérations ? C'est l'objet du résultat suivant.

Proposition 6.29. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ et $D_N := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N\}$. Soit $(f;g) \in (C^N(I;\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *On sait déjà que $(f + \lambda g) \in C^N(I;\mathbb{K})$ (cf. propostion 6.21). Pour tout $n \in D_N$, sa dérivée nième est $f^{(n)} + \lambda g^{(n)}$.*
2. *Le produit fg appartient à $C^N(I;\mathbb{K})$ et, pour tout $n \in D_N$, sa dérivée nième est donnée par la formule de Leibnitz suivante :*

$$\big(f \cdot g\big)^{(n)} \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}\,, \tag{6.13}$$

où, pour $0 \leq k \leq n$, les C_k^n sont les coefficients du binôme de Newton définis par

$$C_k^n \;=\; \frac{n!}{(k!)\cdot((n-k)!)} \quad \textit{et aussi notés par} \quad \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right).$$

3. *Si, de plus, f ne s'annule pas sur I, alors $1/f$ est bien définie sur I et $(1/f) \in C^N(I;\mathbb{K})$.*
4. *Si J un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $h : J \longrightarrow I$ et $h \in C^N(J;\mathbb{K})$ alors la composée $g \circ h$ de g par h est de classe C^N sur J.*

Preuve : On montre le premier résultat.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{S}(n)$ la proposition : $(n \leq N$ et $(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)})$ ou $(n > N)$.
$\mathcal{S}(0)$ est vraie car $0 \leq N$ et, par définition, $(f + \lambda g)^{(0)} = f + \lambda g = f^{(0)} + \lambda g^{(0)}$.
Supposons $\mathcal{S}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Si $n + 1 > N$ alors $\mathcal{S}(n + 1)$ est vraie. Supposons maintenant que $n+1 \leq N$. On a donc $n \leq N$. Comme $\mathcal{S}(n)$ est vraie et $(n > N)$ est fausse, on a $(f+\lambda g)^{(n)} = f^{(n)}+\lambda g^{(n)}$.
Puisque $n + 1 \leq N$, $(f + \lambda g)^{(n)}$ est dérivable (cf. (6.12)) et, par la proposition 6.6,

$$\Big((f + \lambda g)^{(n)}\Big)' \;=\; \Big(f^{(n)}\Big)' \,+\, \lambda\Big(g^{(n)}\Big)'.$$

En utilisant encore (6.12), on obtient $(f + \lambda g)^{(n+1)} = f^{(n+1)} + \lambda g^{(n+1)}$. Donc $\mathcal{S}(n + 1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, on a le résultat cherché pour $n \leq N$.
On montre les autres résultats d'un seul coup.
Tout d'abord, on remarque que, pour $(k;n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$, on a les propriétés $C_k^n = C_{n-k}^n$, $C_n^n = C_0^n = 1$ et, pour $k \geq 1$, $C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$.
Soit I et J deux intervalles non réduits à un point de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition suivante : Pour tout $(f;g) \in (C^n(I;\mathbb{K}))^2$, pour tout $f_0 \in C^n(I;\mathbb{K})$ ne s'annulant pas sur I, pour toute application $h : J \longrightarrow I$ avec $h \in C^n(J;\mathbb{K})$, on a $fg \in C^n(I;\mathbb{K})$, $(1/f_0) \in C^n(I;\mathbb{K})$ et $(g \circ h) \in C^n(J;\mathbb{K})$. De plus, on a la formule (6.13).
On remarque que, pour $n = 0$, la formule (6.13) s'écrit : $fg = fg$, car $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$. Pour $n = 1$, cette formule s'écrit : $(fg)' = f'g + fg'$. D'après la proposition 6.16, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. D'après les propositions 6.6 et 6.18, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Soit $(f;g) \in (C^{n+1}(I;\mathbb{K}))^2$, $f_0 \in C^{n+1}(I;\mathbb{K})$ ne s'annulant pas sur I et $h : J \longrightarrow I$ avec $h \in C^{n+1}(J;\mathbb{K})$. Toutes ces fonctions sont dérivables.
Par la proposition 6.6, on a fg, $(1/f_0)$ et $g\circ h$ sont dérivables et on a $(fg)' = f'g+fg'$, $(1/f_0)' = -f_0'/(f_0)^2$ et $(g \circ h)' = (g' \circ h)h'$.
Par (6.9), on a $f \in C^n(I;\mathbb{K})$, $g \in C^n(I;\mathbb{K})$, $f_0 \in C^n(I;\mathbb{K})$ et $h \in C^n(J;\mathbb{K})$.
Par (6.6), on a $f' \in C^n(I;\mathbb{K})$, $g' \in C^n(I;\mathbb{K})$, $f_0' \in C^n(I;\mathbb{K})$ et $h' \in C^n(J;\mathbb{K})$.
Par l'hypothèse de récurrence, on a $(fg)' = f'g + fg' \in C^n(I;\mathbb{K})$, $(1/f_0)' = -f_0'/(f_0)^2 \in C^n(I;\mathbb{K})$ et $(g \circ h)' = (g' \circ h)h' \in C^n(J;\mathbb{K})$. Par (6.6), on a donc $fg \in C^{n+1}(I;\mathbb{K})$, $(1/f_0) \in C^{n+1}(I;\mathbb{K})$ et $(g \circ h) \in C^{n+1}(J;\mathbb{K})$. En dérivant chaque membre de l'égalité (6.13), on obtient, en utilisant les propositions 6.6

et 3.9,

$$
\begin{aligned}
\big(f\cdot g\big)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot \big(f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}\big)' \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot \big(f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)} \;+\; f^{(n-k)}\cdot g^{(k+1)}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)} \;+\; \sum_{\ell=1}^{n+1} C_{\ell-1}^n \cdot f^{(n-\ell+1)}\cdot g^{(\ell)} \\
&= C_0^n\cdot f^{(n+1)}\cdot g^{(0)} \;+\; \sum_{k=1}^{n}\big(C_k^n \;+\; C_{k-1}^n\big)\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)} \;+\; C_n^n\cdot f^{(0)}\cdot g^{(n+1)} \\
&= C_0^{n+1}\cdot f^{(n+1)}\cdot g^{(0)} \;+\; \sum_{k=1}^{n} C_k^{n+1}\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)} \;+\; C_{n+1}^{n+1}\cdot f^{(0)}\cdot g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1}\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)} \;=\; \sum_{\ell=0}^{n+1} C_{n+1-\ell}^{n+1}\cdot f^{(\ell)}\cdot g^{(n+1-\ell)} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n+1} C_\ell^{n+1}\cdot f^{(\ell)}\cdot g^{(n+1-\ell)} \;=\; \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1}\cdot f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)}\,.
\end{aligned}
$$

On a montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $N \in \mathbb{N}$, les résultats de la proposition 6.29 sont valables d'après $\mathcal{P}(N)$. Comme ces résultats sont valables pour tout $N \in \mathbb{N}$, ils le sont pour $N = \infty$. □

On a vu dans le paragraphe 6.3.1 précédent que l'espace vectoriel $P(I;\mathbb{K})$ des fonctions polynômiales sur I à coefficients dans $\mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I;\mathbb{K})$. On a bien mieux comme le montre le résultat suivant. On rappelle (cf. définition 6.19) que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par $f_n(x) = x^n$.

Proposition 6.30. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $P(I;\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(I;\mathbb{K})$. De plus, pour tout $(n;p) \in \mathbb{N}^2$,*

$$
f_n^{(p)} \;=\; \frac{n!}{(n-p)!}\cdot f_{n-p} \quad \textit{si} \quad p \le n \quad \textit{et} \quad f_n^{(p)} \;=\; 0 \quad \textit{si} \quad p > n\,. \tag{6.14}
$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n et $P(I;\mathbb{K})$ par P. Pour $(n;p) \in \mathbb{N}^2$, soit $g_{n;p} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$
g_{n;p} \;:=\; \frac{n!}{(n-p)!}\cdot f_{n-p} \quad \text{si} \quad p \le n \quad \text{et} \quad g_{n;p} \;=\; 0 \quad \text{si} \quad p > n\,.
$$

D'après la proposition 6.20, on sait que $f_q \in C^1$, pour tout $q \in \mathbb{N}$, et $0 \in C^1$. Donc, toujours grâce à cette proposition 6.20, on a, pour $(n;p) \in \mathbb{N}^2$,
si $p > n$, $g'_{n;p} = 0 = g_{n;p+1}$,
si $p = n$, $g'_{n;p} = (n!)((n-p)!)^{-1}(f_0)' = 0 = g_{n;p+1}$,
et si $p < n$,

$$
\begin{aligned}
g'_{n;p} &= \frac{n!}{(n-p)!}\cdot\big(f_{n-p}\big)' \;=\; \frac{n!}{(n-p)!}\cdot(n-p)\cdot f_{n-p-1} \;=\; \frac{n!}{(n-p-1)!}\cdot f_{n-p-1} \\
&= \frac{n!}{(n-(p+1))!}\cdot f_{n-(p+1)} \;=\; g_{n;p+1}\,.
\end{aligned}
$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a, en prenant $f = f_n$ et $(g_0;\cdots;g_p) = (g_{n;0};\cdots;g_{n;p})$, la validité de la proposition $\mathcal{D}(p)$ de la proposition 6.27. Par cette proposition 6.27, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in C^p$ et, pour $j \in [\![0;p]\!]$, $f_n^{(j)} = g_{n;j}$.

Comme $f_n \in C^1$ et $C^1 \subset C^0$ (cf. (6.9)), on a aussi $f_n \in C^0$. Par la définition 6.23, $f_n \in C^\infty$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f_n^{(j)} = g_{n;j}$, ce qui démontre (6.14).
L'espace vectoriel C^∞ contient l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ donc il contient le sous-espace vectoriel engendré par cet ensemble, à savoir P. $\square$

On a vu, au paragraphe 4.2.3, la notion de prolongement par continuité. On va introduire ici une notion de prolongement à la classe C^k.

Proposition 6.31. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$. On pose $I_a^- :=]-\infty; a[\cap I$, $I_a^+ =]a; +\infty[\cap I$ et $D_N := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N\}$. Soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction dont la restriction $f_{|I_a^-}$ à I_a^- est de classe C^N sur I_a^- et la restriction $f_{|I_a^+}$ à I_a^+ est de classe C^N sur I_a^+. Pour $p \in D_N$, soit $f^{(p)} : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$ la fonction dont la restriction à I_a^- est $(f_{|I_a^-})^{(p)}$ et la restriction à I_a^+ est $(f_{|I_a^+})^{(p)}$. On suppose, de plus, que*

$$\forall\, p \in D_N\,, \quad \exists\, \ell_p \in \mathbb{K}; \quad \lim_a (f_{|I_a^-})^{(p)} \;=\; \ell_p \;=\; \lim_a (f_{|I_a^+})^{(p)}\,. \tag{6.15}$$

Alors f admet un prolongement par continuité g en a, $g \in C^N(I; \mathbb{K})$ et

$$\forall\, p \in D_N\,, \quad g^{(p)}(a) \;=\; \ell_p\,. \tag{6.16}$$

Dans le cadre de cette proposition 6.31, on dit que le prolongement par continuité g de f en a prolonge f à la classe C^N.

Preuve de la proposition 6.31 : Par l'hypothèse (6.15) avec $p = 0$, on sait que les limites à gauche et à droite de f en a existent dans $\mathbb{K}$ et coïncident. Par la proposition 4.21, f admet ℓ_0 pour limite en a. On peut donc définir le prolongement g par continuité de f (cf. définition 4.24) et $g(a) = \ell_0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : pour toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe C^n sur I_a^+ et sur I_a^-, telle que (6.15) avec N remplacé par n soit vraie, son prolongement g par continuité en a est de classe C^n sur I et vérifie (6.16) avec N remplacé par n.
$\mathcal{P}(0)$ est vraie par la proposition 4.21 et la définition 4.24.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe C^{n+1} sur I_a^+ et sur I_a^-, telle que (6.15) avec N remplacé par $n+1$ soit vraie. On sait, par (6.6), que f' est de classe C^n sur I_a^+ et sur I_a^-. Pour $p \in D_n$, on a, d'après la proposition 6.28,

$$\big(f_{|I_a^+}\big)^{(p+1)} \;=\; \Big(\big(f_{|I_a^+}\big)'\Big)^{(p)} \;=\; \big((f')_{|I_a^+}\big)^{(p)} \;=\; \Big((f')^{(p)}\Big)_{|I_a^+}\,,$$

puisque f et $f_{|I_a^+}$ coïncident sur I_a^+ et puisque f' et $(f')_{|I_a^+}$ coïncident sur I_a^+. De même, on a

$$\big(f_{|I_a^-}\big)^{(p+1)} \;=\; \Big(\big(f_{|I_a^-}\big)'\Big)^{(p)} \;=\; \big((f')_{|I_a^-}\big)^{(p)} \;=\; \Big((f')^{(p)}\Big)_{|I_a^-}\,.$$

Par (6.15) avec N remplacé par $n+1$,

$$\forall\, p \in D_n\,, \quad \lim_a (f_{|I_a^-})^{(p+1)} \;=\; \ell_{p+1} \;=\; \lim_a (f_{|I_a^+})^{(p+1)}$$

donc

$$\forall\, p \in D_n\,, \quad \lim_a ((f')_{|I_a^-})^{(p)} \;=\; \ell_{p+1} \;=\; \lim_a ((f')_{|I_a^+})^{(p)}\,.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à f'. Elle admet donc un prolongement g_1 par continuité en a, g_1 est C^n sur I et on a

$$\forall\, q \in D_n\,, \quad g_1^{(q)}(a) \;=\; \ell_{q+1}\,. \tag{6.17}$$

Pour montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, il suffit de montrer que le prolongement g par continuité de f en a est dérivable sur I et que $g' = g_1$. En effet, dans ce cas, g sera C^{n+1} sur I car g_1 y est C^n (cf. (6.6)) et

(6.17) donnera (6.16) avec N remplacé par $n+1$.
Sur I_a^- (resp. I_a^+), $g = f$ et f est de classe C^{n+1}, donc dérivable. De plus, sur I_a^- (resp. I_a^+), $f' = g_1$, donc $g' = g_1$ sur cet intervalle. Il reste à montrer que g est dérivable en a et que $g'(a) = g_1(a)$.
Comme g est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis sur $[x; a]$ ou $[a; x]$, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$. Soit $x \in I \setminus \{a\}$, il existe donc un $c_x \in I$ strictement compris entre x et a tel que $g(x) - g(a) = g'(c_x)(x-a)$. De plus, comme g_1 est continue en a, on a, par la proposition 4.21,

$$\lim_{\neq a} g' \;=\; \lim_{\neq a} g_1 \;=\; g_1(a) \;=\; \ell_1 \,.$$

Soit $\epsilon > 0$. D'après l'existence de la limite précédente, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $y \in]a-\delta; a+\delta[\cap I \setminus \{a\}$, $|g'(y) - \ell_1| < \epsilon$. Pour $x \in I \setminus \{a\}$ avec $x \in]a-\delta; a+\delta[$, on a donc

$$\left| \frac{g(x) - g(a)}{x-a} - \ell_1 \right| \;=\; \left| g'(c_x) - \ell_1 \right| \;<\; \epsilon$$

car $c_x \in]a-\delta; a+\delta[\cap I \setminus \{a\}$. On a montré que g est dérivable en a de nombre dérivé $\ell_1 = g_1(a)$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $N \in \mathbb{N}$, les résultats de la proposition 6.31 sont valables d'après $\mathcal{P}(N)$. Comme ces résultats sont valables pour tout $N \in \mathbb{N}$, ils le sont pour $N = \infty$. □

7 Fonctions réciproques.

Dans cette partie, on donne quelques propriétés basiques sur les bijections. Ensuite, on conjugue la stricte monotonie et la continuité d'une fonction pour établir la bijectivité d'une telle fonction et la continuité de sa bijection réciproque. Enfin, lorsque la fonction en question est plus régulière, on montre qu'il en est de même pour la bijection réciproque.

7.1 Injection, surjection, bijection.

On introduit ici les notions d'injection, de surjection et de bijection. On montre quelques propriétés basiques sur ces notions. En particulier, on montre des résultats annoncés dans le paragraphe 1.1.

Définition 7.1. *Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.*
On dit que f est injective si

$$\forall\, (x; x') \in E^2 \,, \quad \big((f(x) \,=\, f(x')) \implies (x \,=\, x') \big) \,. \tag{7.1}$$

On dit que f est est surjective si

$$\forall\, y \in F \,, \quad \exists\, x \in E \,; \quad y \,=\, f(x) \,. \tag{7.2}$$

On dit que f est bijective si f est injective et f est surjective.

On a les propriétés suivantes.

Proposition 7.2. *Soit E, F et G trois ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.*

1. *Si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective.*
2. *Si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective.*
3. *Si f et g sont bijectives, $g \circ f$ est bijective.*

4. *f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.*
5. *f est bijective si et seulement si*

$$\forall\, y \in F\,, \quad \exists\,!\, x \in E\,; \quad y \,=\, f(x)\,. \tag{7.3}$$

6. *f est bijective si et seulement s'il existe une application $h : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$.*
7. *Si f est bijective alors il existe une unique fonction $h : F \longrightarrow E$ vérifiant $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$. Cette fonction h associe, à chaque $y \in F$, l'unique solution de l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$.*
8. *Si f est injective alors l'application $\tilde{f} : E \longrightarrow f(E)$ définie par, pour $x \in E$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, est bijective.*

Preuve :

1. On suppose f et g injectives et on montre que $g \circ f$ est injective en utilisant (7.1) avec f remplacée par $g \circ f$.
   Soit $(x; x') \in E^2$ tel que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. On a donc $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme g est injective, on en déduit que $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, on en déduit que $x = x'$. On a montré que $g \circ f$ est injective.
2. On suppose f et g surjectives et on montre que $g \circ f$ est surjective en utilisant (7.2) avec f remplacée par $g \circ f$.
   Soit $y \in G$. Comme g est surjective, il existe $z \in F$ tel que $g(z) = y$. Comme f est surjective et $z \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z$. On a donc $y = g(z) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. On a montré que $g \circ f$ est surjective.
3. Par définition de la bijectivité, il suffit d'appliquer 1 et 2.
4. Par définition de f, on a $f(E) \subset F$. On a donc

$$\big(f(E) \,=\, F\big) \iff \big(F \,\subset\, f(E)\big) \iff \big(\forall\, y \in F\,,\, y \in f(E)\big) \iff \big(\forall\, y \in F\,, \exists\, x \in E\,;\; y \,=\, f(x)\big)\,.$$

5. On montre les deux implications.
   $\Longrightarrow$) : On suppose f bijective. Soit $y \in F$. On considère l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$. Comme f est surjective, cette équation a au moins une solution. Si x et x' sont des solutions de cette équation alors, $f(x) = y = f(x')$. Comme f est injective, $x = x'$. On a montré (7.3).
   $\Longleftarrow$) : On suppose (7.3) vraie. Soit $(x_1; x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Soit $y = f(x_1) = f(x_2) \in F$. x_1 et x_2 sont donc des solutions de l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$. Par (7.3), cette équation a une unique solution donc $x_1 = x_2$. On a montré que f est injective.
   Pour $y \in F$, on sait, par (7.3), qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a montré que (7.2) est vraie donc que f est surjective.
   On a montré que f est bijective.
6. On montre les deux implications.
   $\Longrightarrow$) : On suppose f bijective. Soit $y \in F$. D'après le 5 et (7.3), l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$ a une unique solution que l'on note $h(y)$. On construit ainsi une application $h : F \longrightarrow E$.
   Pour $y \in F$, on a, par définition de $h(y)$, $f(h(y)) = y$. On a montré que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$.
   Pour $x_1 \in E$, soit $y = f(x_1)$. Comme x_1 est solution de l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$, on a $x_1 = h(y)$ donc $x_1 = h(f(x_1))$. On a montré que $h \circ f = \mathrm{Id}_E$.
   $\Longleftarrow$) : On suppose qu'il existe une application $h : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$. Soit $y \in F$. Comme $y = (f \circ h)(y)$, on a $y = f(h(y))$ donc l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$, a pour solution $h(y)$. Si $x' \in E$ est une solution de cette équation, alors on a, $f(x') = y$ donc $h(f(x')) = h(y)$ et, d'après $h \circ f = \mathrm{Id}_E$, $x' = h(y)$. Donc cette équation a une unique solution.
   On a donc montré (7.3) et, par 5, que f est bijective.

7. On suppose f bijective. Soit $h : F \longrightarrow E$ une application donnée par le membre de droite de 6. Soit $k : F \longrightarrow E$ vérifiant $f \circ k = \mathrm{Id}_F$ et $k \circ f = \mathrm{Id}_E$. Pour $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc $k(y) = k(f(x)) = (k \circ f)(x) = x = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$. On a montré que $k = h$. D'après la preuve de 6, le reste de l'affirmation dans 7 est vrai.
8. Comme $\tilde{f}(E) = f(E)$, $\tilde{f}$ est surjective. Soit $(x_1; x_2) \in E^2$ tel que $\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2)$. Par définition de $\tilde{f}$, on a $f(x_1) = f(x_2)$ et, comme f est injective, on a $x_1 = x_2$. On a montré que $\tilde{f}$ est injective. D'où $\tilde{f}$ est bijective. $\square$

Définition 7.3. *Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est bijective, l'application $h : F \longrightarrow E$, qui vérifie $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$, est appelée bijection réciproque de f et est notée par $f^{\langle -1 \rangle} := h$.*
Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est injective, on dira que f est bijective de E sur $f(E)$. Cela se réfère au fait que l'application $\tilde{f}$ dans la proposition 7.2 est bijective. De manière abusive, on dira que la bijection réciproque $(\tilde{f})^{\langle -1 \rangle}$ de $\tilde{f}$ est la bijection réciproque de f et on la notera $f^{\langle -1 \rangle}$.

7.2 Fonctions continues strictement monotones.

Dans ce paragraphe, on revient sur les fonctions réelles monotones. On travaille donc avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Pour une fonction monotone sur un intervalle, on dispose d'une condition suffisante étonnante pour avoir la continuité de la fonction.

Proposition 7.4. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Si l'image $f(I)$ de I par f est un intervalle de $\mathbb{R}$ alors f est continue sur I.*

Preuve : Si l'intervalle $f(I)$ est un singleton $\{c\}$, avec $c \in \mathbb{R}$, alors f est constante égale à c donc continue sur I. On suppose désormais que $f(I)$ est un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On montre que f est continue en a en utilisant (4.12). On rappelle que $\sup f := \sup f(I)$ et $\inf f := \inf f(I)$. Comme $f(I)$ est un intervalle, on remarque que $]\inf f; \sup f[\subset f(I)$.

1. Cas où f est croissante. On distingue les trois cas suivants : $f(a) = \inf f$, $\inf f < f(a) < \sup f$ et $f(a) = \sup f$.
   a). On suppose $f(a) = \inf f$. Dans ce cas, $f(a) = \min f(I)$ et il existe $m \in (]f(a); +\infty[\cup\{+\infty\})$ tel que $f(I) = [f(a); m[$ ou $f(I) = [f(a); m]$.
   Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $f(I)\cap]f(a); f(a) + \epsilon[$ est non vide donc il existe $b \in I$ tel que $f(b) \in]f(a); f(a) + \epsilon[$. Comme f est croissante, on a forcément $b > a$. Soit $\delta = b - a > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est croissante et $f(a) = \inf f$, $f(a) \leq f(x) \leq f(a + \delta) = f(b) < f(a) + \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.
   b). On suppose que $f(a) = \sup f$. Dans ce cas, $f(a) = \max f(I)$ et il existe $m \in (]-\infty; f(a)[\cup\{-\infty\})$ tel que $f(I) = [m; f(a)]$ ou $f(I) =]m; f(a)]$.
   Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $f(I)\cap]f(a) - \epsilon; f(a)[$ est non vide donc il existe $b \in I$ tel que $f(b) \in]f(a) - \epsilon; f(a)[$. Comme f est croissante, on a forcément $b < a$. Soit $\delta = a - b > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est croissante et $f(a) = \sup f$, $f(a) \geq f(x) \geq f(a - \delta) = f(b) > f(a) - \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.
   c). On suppose $\inf f < f(a) < \sup f$. Il existe donc $(m_-; m_+) \in (f(I))^2$ tel que $m_- < f(a) < m_+$. En particulier, $[m_-; m_+] \subset f(I)$.
   Soit $\epsilon > 0$. Les ensembles $[m_-; m_+]\cap]f(a) - \epsilon; f(a)[$ et $[m_-; m_+]\cap]f(a); f(a) + \epsilon[$ sont non vides. Donc il existe $(c_-; c_+) \in I^2$ tel que $f(a) - \epsilon < f(c_-) < f(a) < f(c_+) < f(a) + \epsilon$. Comme f est croissante, on a forcément $c_- < a < c_+$. Soit $\delta = \min(a - c_-; c_+ - a) > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est croissante et $c_- \leq a - \delta < x < a + \delta \leq c_+$, $f(a) - \epsilon < f(c_-) \leq f(x) \leq f(c_+) < f(a) + \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.
2. Cas où f est décroissante. On distingue aussi les trois cas suivants : $f(a) = \inf f$, $\inf f < f(a) < \sup f$ et $f(a) = \sup f$.

a). On suppose $f(a) = \inf f$. Dans ce cas, $f(a) = \min f(I)$ et il existe $m \in (]f(a); +\infty[\cup \{+\infty\})$ tel que $f(I) = [f(a); m[$ ou $f(I) = [f(a); m]$.
Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $f(I) \cap]f(a); f(a) + \epsilon[$ est non vide donc il existe $b \in I$ tel que $f(b) \in]f(a); f(a)+\epsilon[$. Comme f est décroissante, on a forcément $b < a$. Soit $\delta = a - b > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est décroissante et $f(a) = \inf f$, $f(a) \leq f(x) \leq f(a - \delta) = f(b) < f(a) + \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.

b). On suppose que $f(a) = \sup f$. Dans ce cas, $f(a) = \max f(I)$ et il existe $m \in (]-\infty; f(a)[\cup \{-\infty\})$ tel que $f(I) = [m; f(a)]$ ou $f(I) =]m; f(a)]$.
Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $f(I) \cap]f(a) - \epsilon; f(a)[$ est non vide donc il existe $b \in I$ tel que $f(b) \in]f(a) - \epsilon; f(a)[$. Comme f est décroissante, on a forcément $b > a$. Soit $\delta = b - a > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est décroissante et $f(a) = \sup f$, $f(a) \geq f(x) \geq f(a + \delta) = f(b) > f(a) - \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.

c). On suppose $\inf f < f(a) < \sup f$. Il existe donc $(m_-; m_+) \in (f(I))^2$ tel que $m_- < f(a) < m_+$. En particulier, $[m_-; m_+] \subset f(I)$.
Soit $\epsilon > 0$. Les ensembles $[m_-; m_+] \cap]f(a) - \epsilon; f(a)[$ et $[m_-; m_+] \cap]f(a); f(a) + \epsilon[$ sont non vides. Donc il existe $(c_-; c_+) \in I^2$ tel que $f(a) - \epsilon < f(c_-) < f(a) < f(c_+) < f(a) + \epsilon$. Comme f est décroissante, on a forcément $c_- > a > c_+$. Soit $\delta = \min(a - c_+; c_- - a) > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est décroissante et $c_+ \leq a - \delta < x < a + \delta \leq c_-$, $f(a) - \epsilon < f(c_-) \leq f(x) \leq f(c_+) < f(a) + \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a. $\square$

Maintenant, voyons ce que l'on peut dire des fonctions réelles continues et strictement monotones sur un intervalle.

Proposition 7.5. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. Alors $f(I)$ est un intervalle et f est bijective de I sur $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque $f^{\langle -1 \rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone de même sens de variation que f.*

Preuve : Par le corollaire 5.2, on sait que $f(I)$ est un intervalle. Vérifions que f est injective.
Soit $(x; x') \in I^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Si $x > x'$ alors, comme f est strictement monotone, on a soit $f(x) > f(x')$ soit $f(x) < f(x')$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Si $x < x'$ alors, comme f est strictement monotone, on a soit $f(x) > f(x')$ soit $f(x) < f(x')$, ce qui est aussi contradictoire avec l'hypothèse. Donc $x = x'$. On a montré que f est injective.
D'après la définition 7.3, f est bijective de I sur $f(I)$. Vérifions que sa bijection réciproque $f^{\langle -1 \rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est strictement monotone de même sens de variation que f.

a). Cas où f est strictement croissante. Soit $(y; y') \in (f(I))^2$ avec $y < y'$. Soit $x = f^{\langle -1 \rangle}(y) \in I$ et $x' = f^{\langle -1 \rangle}(y') \in I$. Si $x = x'$ alors $y = f(x) = f(x') = y'$. Contradiction avec $y < y'$. Si $x > x'$ alors, comme f est strictement croissante, $y = f(x) > f(x') = y'$. Contradiction avec $y < y'$. D'où $x < x'$ soit $f^{\langle -1 \rangle}(y) < f^{\langle -1 \rangle}(y')$. On a montré que $f^{\langle -1 \rangle}$ est strictement croissante.

b). Cas où f est strictement décroissante. Soit $(y; y') \in (f(I))^2$ avec $y < y'$. Soit $x = f^{\langle -1 \rangle}(y) \in I$ et $x' = f^{\langle -1 \rangle}(y') \in I$. Si $x = x'$ alors $y = f(x) = f(x') = y'$. Contradiction avec $y < y'$. Si $x < x'$ alors, comme f est strictement décroissante, $y = f(x) > f(x') = y'$. Contradiction avec $y < y'$. D'où $x > x'$ soit $f^{\langle -1 \rangle}(y) > f^{\langle -1 \rangle}(y')$. On a montré que $f^{\langle -1 \rangle}$ est strictement décroissante.

L'application $f^{\langle -1 \rangle}$ est définie sur un intervalle, à savoir $f(I)$, son image est un intervalle, à savoir I. De plus, elle est strictement monotone donc monotone. Par la proposition 7.4, elle est continue sur $f(I)$. $\square$

Dans le cadre de la proposition 7.5, on peut se demander si l'on a des informations sur l'image $f(I)$ de I par f. Lorsque I est un segment (c'est-à-dire un intervalle fermé et borné), on a déjà une réponse donnée par le théorème de Heine (cf. théorème 5.3).
Prenons $I = [a; b]$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante et continue. Alors, par ce théorème, $f(I)$ s'écrit $[m; M]$ où $m = \inf f$ et $M = \sup f$. Comme f est croissante, on a bien sûr $m = f(a)$ et $M = f(b)$. Donc $f(I) = [f(a); f(b)]$.
Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement décroissante et continue, on voit de même que $f(I) = [f(b); f(a)]$.

Qu'en est-il si I n'est pas un segment ?

Proposition 7.6. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. Soit $a = \inf I \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ et $b = \sup I \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$. On rappelle que les limites $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_b f$ existent dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ (cf. propositions 4.36 et 4.37). Alors,*

1. *si f est strictement croissante,*
$$f\big(]a;b[\big) \;=\; \big]\lim_a f\,;\,\lim_b f\big[\,,$$

2. *si f est strictement décroissante,*
$$f\big(]a;b[\big) \;=\; \big]\lim_b f\,;\,\lim_a f\big[\,.$$

Dans le cadre de la proposition 7.5, cette proposition 7.6 s'applique, puisque qu'une fonction strictement monotone est aussi monotone. De plus, pour déterminer complètement $f(I)$, il suffit de calculer $f(a)$ si $a \in I$ et $f(b)$ si $b \in I$. En effet,
si $a \notin I$ et $b \notin I$, alors $I =]a;b[$ et $f(I) = f(]a;b[)$,
si $a \in I$ et $b \notin I$, alors $I = [a;b[= \{a\} \cup]a;b[$ et $f(I) = \{f(a)\} \cup f(]a;b[)$,
si $a \notin I$ et $b \in I$, alors $I =]a;b] = \{b\} \cup]a;b[$ et $f(I) = \{f(b)\} \cup f(]a;b[)$,
si $a \in I$ et $b \in I$, alors $I = [a;b] = \{a;b\} \cup]a;b[$ et $f(I) = \{f(a); f(b)\} \cup f(]a;b[)$.

Preuve de la proposition 7.6 : Notons par g la restriction de f à $]a;b[$. On a $f(]a;b[) = g(]a;b[)$. Comme f est continue, g est continue, d'après la proposition 4.21. Comme f est strictement monotone, g est strictement monotone de même sens de variation que f. Comme f et g sont monotones, on sait, par les propositions 4.36 et 4.37, que $\lim\limits_a f$, $\lim\limits_a g$, $\lim\limits_b f$ et $\lim\limits_b g$ existent dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Par la proposition 4.21, $\lim\limits_a g = \lim\limits_a f$ et $\lim\limits_b g = \lim\limits_b f$.

1. Cas où f est strictement croissante. Par les propositions 4.36 et 4.37 appliquées à g, on sait que $\lim\limits_a g = \inf g(]a;b[)$ et $\lim\limits_b g = \sup g(]a;b[)$.
Soit $x_0 \in]a;b[$. Il existe $(x_-; x_+) \in]a;b[^2$ tel que $x_- < x_0 < x_+$ (cf. remarque 1.2). Comme g est strictement croissante, on a $g(x_-) < g(x_0) < g(x_+)$. Pour $x \leq x_-$, on a $g(x) \leq g(x_-)$ donc, par passage à la limite $x \to a$ dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), $\lim\limits_a g \leq g(x_-) < g(x_0)$. Pour $x \geq x_+$, on a $g(x) \geq g(x_+)$ donc, par passage à la limite $x \to b$ dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), $\lim\limits_b g \geq g(x_+) > g(x_0)$. Donc $g(x_0) \in]\lim\limits_a g; \lim\limits_b g[$. On a montré que $g(]a;b[) \subset]\lim\limits_a g; \lim\limits_b g[$.
Soit $y \in]\lim\limits_a g; \lim\limits_b g[$. On a donc $y \in]\inf g(]a;b[); \sup g(]a;b[)[$. Comme y ne majore pas $g(]a;b[)$, il existe $x_+ \in]a;b[$ tel que $y < g(x_+)$. Comme y ne minore pas $g(]a;b[)$, il existe $x_- \in]a;b[$ tel que $y > g(x_-)$. On a donc $g(x_-) < y < g(x_+)$ et, comme g est croissante, $x_- < x_+$. Comme g est continue, on a, par le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1) appliqué à g sur $[x_-; x_+]$, $y \in g([x_-; x_+]) \subset g(]a;b[)$. On a montré que $]\lim\limits_a g; \lim\limits_b g[\subset g(]a;b[)$.
Conclusion : $g(]a;b[) =]\lim\limits_a g; \lim\limits_b g[$. Donc $f(]a;b[) = g(]a;b[) =]\lim\limits_a g; \lim\limits_b g[=]\lim\limits_a f; \lim\limits_b f[$.

2. Cas où f est strictement décroissante. Par les propositions 4.36 et 4.37 appliquées à g, on sait que $\lim\limits_a g = \sup g(]a;b[)$ et $\lim\limits_b g = \inf g(]a;b[)$.
Soit $x_0 \in]a;b[$. Il existe $(x_-; x_+) \in]a;b[^2$ tel que $x_- < x_0 < x_+$ (cf. remarque 1.2). Comme g est strictement décroissante, on a $g(x_-) > g(x_0) > g(x_+)$. Pour $x \leq x_-$, on a $g(x) \geq g(x_-)$ donc, par passage à la limite $x \to a$ dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), $\lim\limits_a g \geq g(x_-) > g(x_0)$. Pour $x \geq x_+$, on a $g(x) \leq g(x_+)$ donc, par passage à la limite $x \to b$ dans ces inégalités (cf. proposition 4.34), $\lim\limits_b g \leq g(x_+) < g(x_0)$. Donc $g(x_0) \in]\lim\limits_b g; \lim\limits_a g[$. On a montré que $g(]a;b[) \subset]\lim\limits_b g; \lim\limits_a g[$.
Soit $y \in]\lim\limits_b g; \lim\limits_a g[$. On a $y \in]\inf g(]a;b[); \sup g(]a;b[)[$. Comme y ne majore pas $g(]a;b[)$, il existe

$x_+ \in]a;b[$ tel que $y < g(x_+)$. Comme y ne minore pas $g(]a;b[)$, il existe $x_- \in]a;b[$ tel que $y > g(x_-)$. On a donc $g(x_-) < y < g(x_+)$ et, comme g est décroissante, $x_- > x_+$. Comme g est continue, on a, par le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1) appliqué à g sur $[x_+;x_-]$, $y \in g([x_+;x_-]) \subset g(]a;b[)$. On a montré que $]\lim_b g; \lim_a g[\subset g(]a;b[)$.
Conclusion : $g(]a;b[) =]\lim_b g; \lim_a g[$. Donc $f(]a;b[) = g(]a;b[) =]\lim_b g; \lim_a g[=]\lim_b f; \lim_a f[$. □

7.3 Fonctions dérivables strictement monotones.

Dans ce paragraphe, on continue l'étude des fonctions réelles monotones en considérant l'influence de la dérivabilité.

Proposition 7.7. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et dérivable. Alors $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$, sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone de même sens de variation que f. De plus, pour tout point $y_0 \in f(I)$ tel que $f'(f^{\langle -1\rangle}(y_0)) \neq 0$, $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable en y_0 de nombre dérivé*

$$\big(f^{\langle -1\rangle}\big)'(y_0) \;=\; \frac{1}{f'\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big)}\,.$$

Preuve : Comme f est dérivable sur I, elle y est continue, d'après la proposition 6.4. On peut donc appliquer la proposition 7.5. Ceci prouve que $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$, sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone de même sens de variation que f.
Soit $y_0 \in f(I)$ tel que $f'(f^{\langle -1\rangle}(y_0)) \neq 0$. On montre que $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable en y_0 en utilisant la proposition 6.1.
Pour $y \in f(I) \setminus \{y_0\}$, on a, par l'injectivité de $f^{\langle -1\rangle}$, $f^{\langle -1\rangle}(y) \neq f^{\langle -1\rangle}(y_0)$ donc

$$\frac{f^{\langle -1\rangle}(y) \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)}{y - y_0} \;=\; \left(\frac{y - y_0}{f^{\langle -1\rangle}(y) \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)}\right)^{-1} \;=\; \left(\frac{f\big(f^{\langle -1\rangle}(y)\big) \,-\, f\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big)}{f^{\langle -1\rangle}(y) \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)}\right)^{-1}. \tag{7.4}$$

Comme $f^{\langle -1\rangle}$ est continue en y_0, on a $\lim_{y_0} f^{\langle -1\rangle} = f^{\langle -1\rangle}(y_0)$ et, d'après la proposition 4.21, $\lim_{\neq y_0} f^{\langle -1\rangle} = f^{\langle -1\rangle}(y_0)$. Comme f est dérivable en $f^{\langle -1\rangle}(y_0)$, on a

$$\lim_{x \to f^{\langle -1\rangle}(y_0)} \frac{f(x) \,-\, f\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big)}{x \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)} \;=\; f'\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big)\,.$$

Par composition de limites (cf. proposition 4.27), on a

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ \neq}} \frac{f\big(f^{\langle -1\rangle}(y)\big) \,-\, f\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big)}{f^{\langle -1\rangle}(y) \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)} \;=\; f'\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big) \;\neq\; 0\,,$$

par hypothèse. Par inversion de limite (cf. proposition 4.27) et (7.4), on en déduit que $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable en y_0 de nombre dérivé

$$\Big(f'\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big)\Big)^{-1}.$$

□

Corollaire 7.8. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et de classe C^1 sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$, sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur I, de classe C^1 sur tout sous-intervalle, non réduit à un point, J de $f(I)$ vérifiant*

$$J \;\subset\; \big\{y \in f(I)\,;\quad f'\big(f^{\langle -1\rangle}(y)\big) \,\neq\, 0\big\} \;=:\; \mathcal{P}(f)\,.$$

Preuve : On note $\mathcal{P}(f)$ par F. La dérivée f' de f ne s'annule donc pas sur $f^{\langle -1\rangle}(F)$.
Par la proposition 7.7, on sait que $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$ et sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur I. De plus, $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable sur F et sa dérivée est $(f' \circ f^{\langle -1\rangle})^{-1}$.
Soit J un intervalle, non réduit à un point, inclu dans F. Comme $f^{\langle -1\rangle}$ est continue sur J et f' est continue sur $f^{\langle -1\rangle}(J)$, $f' \circ f^{\langle -1\rangle}$ est continue sur J, par composition (cf. proposition 6.16). Comme $f^{\langle -1\rangle}(J) \subset f^{\langle -1\rangle}(F)$, f' ne s'annule pas sur $f^{\langle -1\rangle}(J)$ donc, par inversion (cf. proposition 6.16), $(f' \circ f^{\langle -1\rangle})^{-1}$ est aussi continue sur J. Par la définition 6.17, $f^{\langle -1\rangle}$ est C^1 sur J. □

Lorsque la fonction f est plus régulière, il en est de même de sa bijection réciproque.

Corollaire 7.9. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $N \in (\mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et de classe C^N sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$, sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur I, de classe C^N sur tout sous-intervalle, non réduit à un point, J de $f(I)$ vérifiant*

$$J \;\subset\; \big\{y \in f(I)\,; \quad f'\big(f^{\langle -1\rangle}(y)\big) \neq 0\big\} \;=:\; \mathcal{P}(f)\,.$$

Preuve : On note $\mathcal{P}(f)$ par F. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et dérivable sur I. On sait, par la proposition 7.7, qu'elle est bijective de I sur $f(I)$ et que sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur I et dérivable sur tout intervalle non réduit à un point $J \subset F$.
Soit J un intervalle, non réduit à un point, inclu dans F. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ l'implication

$$\big(f \text{ est } C^n \text{ sur } I\big) \Longrightarrow \big(f^{\langle -1\rangle} \text{ est } C^n \text{ sur } J\big)\,.$$

Par le corollaire 7.8, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer $\mathcal{P}(n+1)$, on suppose que f est C^{n+1} sur I. Par la définition 6.23, f' est C^n sur I et donc aussi sur $f^{\langle -1\rangle}(J)$. Par la proposition 6.22, on sait que f est C^n sur I et donc, par l'hypothèse de récurrence, $f^{\langle -1\rangle}$ est C^n sur J. Par la proposition 7.7, on sait que $(f^{\langle -1\rangle})'$ est donnée par $(f' \circ f^{\langle -1\rangle})^{-1}$. Par composition (cf. proposition 6.29), $f' \circ f^{\langle -1\rangle}$ est C^n sur J et, comme $f' \circ f^{\langle -1\rangle}$ ne s'annule pas sur J, puisque $J \subset F$, on en déduit que, par inversion (cf. proposition 6.29), $(f^{\langle -1\rangle})'$ est C^n sur J. D'après la définition 6.23, $f^{\langle -1\rangle}$ est C^{n+1} sur J. On a montré donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(N)$ prouve que $f^{\langle -1\rangle}$ est C^N sur J. Ceci étant vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a le résultat aussi pour $N = \infty$. □

8 Fonctions usuelles.

Dans cette partie, on procède à la construction de plusieurs fonctions usuelles. On en donne des propriétés. On classe ces fonctions en quatre familles : fonction exponentielle et logarithmes, fonctions puissance, fonctions circulaires, fonctions hyperboliques.

8.1 Fonction exponentielle complexe.

Dans ce paragraphe, on donne la définition de la fonction exponentielle complexe ainsi que certaines propriétés de cette fonction. La justification complète de la construction et des propriétés est renvoyée au paragraphe 9.4.

Définition 8.1. *Pour $z \in \mathbb{C}$, on* **admet** *que la suite complexe*

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

converge dans $\mathbb{C}$. *On note par* $\exp(z)$ *sa limite, i.e.*

$$\exp(z) \ := \ \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \, .$$

L'application $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *qui, à tout* $z \in \mathbb{C}$, *associe* $\exp(z)$ *est appelée fonction exponentielle complexe. Pour* $z \in \mathbb{C}$, *on note aussi* $e^z := \exp(z)$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a défini la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence (cf. définition 3.13). On peut vérifier par récurrence que, si $z \neq 0$, cette suite ne s'annule pas. Pour $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $z^{-n} = 1/z^n$.
La fonction exponentielle complexe possède les propriétés remarquables suivantes.

Proposition 8.2. *Soit* $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. *On a les propriétés suivantes :*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \overline{\exp(z)} \ = \ \exp\big(\overline{z}\big)\,, \tag{8.1}$$

$$\forall\, (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2\,, \quad \exp(z_1 + z_2) \ = \ \exp(z_1)\cdot\exp(z_2)\,, \tag{8.2}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \exp(z) \ \neq \ 0 \quad et \quad \frac{1}{\exp(z)} \ = \ \exp(-z)\,, \tag{8.3}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \forall\, p \in \mathbb{Z}\,, \quad \exp(p\cdot z) \ = \ \big(\exp(z)\big)^p\,, \tag{8.4}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exp(x) \ \in \mathbb{R}^{+*}\,, \tag{8.5}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exp(ix) \ \in \mathcal{U}\,. \tag{8.6}$$

Preuve : Voir la proposition 9.8 au paragraphe 9.4. □

On **admet** aussi le résultat de régularité suivant.

Proposition 8.3. *Soit* $\alpha \in \mathbb{C}$ *et* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par, pour* $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \exp(\alpha t)$. *La fonction* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée* $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *est donnée par, pour* $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \alpha \exp(\alpha t)$.

Preuve : Voir la proposition 9.9 au paragraphe 9.4. □

On **admet** encore la proposition suivante qui permettra d'étudier les fonctions sinus et cosinus au paragraphe 8.4.

Proposition 8.4. *La fonction* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$, *donnée par* $\varphi(t) = \exp(it)$, *est surjective.*
L'image réciproque $\varphi^{-1}(\{1\})$ *du singleton* $\{1\}$ *par* φ *est donnée par* $\varphi^{-1}(\{1\}) = 2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi\cdot k;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
En particulier, on a

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,, \quad \big(\varphi(x_1) \ = \ \varphi(x_2)\big) \iff \big(x_1 - x_2 \in 2\pi\mathbb{Z}\big)\,. \tag{8.7}$$

L'application φ *est* 2π*-périodique i.e.*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \varphi(x \,+\, 2\pi) \ = \ \varphi(x)\,.$$

Enfin, on a $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\pi/2) = i$, $\varphi(\pi) = -1$ *et* $\varphi(3\pi/2) = -i$.

Preuve : Voir les propositions 9.10 et 9.13 au paragraphe 9.4. □

Corollaire 8.5. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$, *l'ensemble* $\mathcal{A}_z := \{t \in \mathbb{R};\ z = |z|\exp(it)\}$ *est infini et s'écrit* $\mathcal{A}_z = \{\theta + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\}$, *pour un certain* $\theta \in \mathbb{R}$. *De plus, l'ensemble* $\mathcal{A}_z \cap]-\pi;\pi]$ *a exactement un élément.*

Preuve : Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a $|z| \neq 0$ et $z/|z| \in \mathcal{U}$. Par la proposition 8.4, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\theta) = z/|z|$ donc $z = |z|\exp(i\theta)$ et $\theta \in \mathcal{A}_z$.

Soit $\theta' \in \mathcal{A}_z$. On a $\varphi(\theta) = z/|z| = \varphi(\theta')$ et, d'après (8.7), il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta' = \theta + 2\pi k$. Donc $\mathcal{A}_z \subset \{\theta + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi(\theta + 2\pi k) = \varphi(2\pi k)\varphi(\theta)$, d'après (8.2). Comme $2\pi\mathbb{Z} = \varphi^{-1}(\{1\})$ (cf. proposition 8.4), $\varphi(2\pi k) = 1$ et $\varphi(\theta + 2\pi k) = \varphi(\theta) = z/|z|$. Donc $\{\theta + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{A}_z$.
On a montré que $\mathcal{A}_z = \{\theta + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
On note par E la fonction partie entière définie dans la proposition 9.3.
Par la proposition 9.3, $(\theta/(2\pi)) - E(\theta/(2\pi)) \in [0; 1[$.
Si $(\theta/(2\pi)) - E(\theta/(2\pi)) \in [0; 1/2]$, on a, pour $k = -E(\theta/(2\pi)) \in \mathbb{Z}$, $(\theta/(2\pi)) + k \in [0; 1/2]$ donc aussi $(\theta/(2\pi)) + k \in]-(1/2); 1/2]$. D'où $\theta + 2\pi k \in]-\pi; \pi]$ et $\mathcal{A}_z \cap]-\pi; \pi]$ contient au moins un élément.
Si $(\theta/(2\pi)) - E(\theta/(2\pi)) \in]1/2; 1[$, on a, pour $k = -1 - E(\theta/(2\pi)) \in \mathbb{Z}$, $(\theta/(2\pi)) + k \in]-(1/2); 0[$ donc $(\theta/(2\pi)) + k \in]-(1/2); 1/2]$. D'où $\theta + 2\pi k \in]-\pi; \pi]$ et $\mathcal{A}_z \cap]-\pi; \pi]$ contient au moins un élément.
Dans tous les cas, on a vérifié que $\mathcal{A}_z \cap]-\pi; \pi]$ contient au moins un élément.
On remarque que si l'on a deux réels a et b vérifiant $-\pi < a \leq b \leq \pi$ alors $0 \leq b - a$, $-\pi \leq -a < \pi$ donc $0 \leq b - a < 2\pi$.
Soit $(k_1; k_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\theta + 2\pi k_1 \in]-\pi; \pi]$ et $\theta + 2\pi k_2 \in]-\pi; \pi]$. On a donc $0 \leq |2\pi k_1 - 2\pi k_2| < 2\pi$ soit $0 \leq |k_1 - k_2| < 1$. Comme $(k_1; k_2) \in \mathbb{Z}^2$, on a forcément $k_1 = k_2$. Donc, il y a au plus un élément dans $\mathcal{A}_z \cap]-\pi; \pi]$.
On a montré que $\mathcal{A}_z \cap]-\pi; \pi]$ a exactement un élément. □

Définition 8.6. *Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on dit qu'un réel t vérifiant $z = |z| \exp(it)$ est un argument de z. L'ensemble $\mathcal{A}_z$, défini dans le corollaire 8.5, est donc l'ensemble infini des arguments de z. L'unique élément de $\mathcal{A}_z$ qui appartient à $]-\pi; \pi]$ est appelé argument principal de z et est noté par* $\mathrm{Arg}(z)$.

D'après la proposition 8.4, 0 est l'argument principal de 1, $\pi/2$ est l'argument principal de i, π est l'argument principal de -1, $3\pi/2$ est un argument de $-i$ mais c'est $3\pi/2 - 2\pi = -\pi/2$ qui est l'argument principal de $-i$.

Remarque 8.7. *Il se trouve que l'on peut donner une formule pour l'argument principal de z lorsque z n'appartient pas à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C};\ \Re(z) \leq 0 \text{ et } \Im(z) = 0\}$. Cette formule fait intervenir la fonction* Arctan *définie dans la proposition 8.23. On renvoie à la proposition 9.15 à ce sujet.*
Pour terminer, on signale que l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *est surjective, comme on le verra dans la proposition 8.9 du paragraphe 8.2.*

8.2 Fonction exponentielle réelle et logarithmes.

Dans ce paragraphe, on se concentre sur l'exponentielle réelle, la restriction à $\mathbb{R}$ de l'exponentielle complexe du paragraphe 8.1.

Tout d'abord, on remarque que, pour $x \in \mathbb{R}^+$, la suite

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

est en fait réelle positive croissante et de premier terme 1. Donc, par la proposition 3.46, sa limite $\exp(x)$ est réelle et vérifie

$$\exp(x) \ = \ \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \ = \ \sup \left\{ \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \ ;\ N \in \mathbb{N} \right\} \ \geq \ 1\,. \tag{8.8}$$

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)$ est non nul et $\exp(-x) = 1/\exp(x)$, cf. (8.3) et (8.5).

Proposition 8.8. *La fonction exponentielle réelle est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, i.e.* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$. *Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même, i.e.* $\exp' = \exp$. *Elle est strictement croissante et bijective* *de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$. *Sa bijection réciproque* $\exp^{\langle -1\rangle} : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est de classe* C^1, *strictement croissante et on a, pour* $x > 0$,

$$\left(\exp^{\langle -1\rangle}\right)'(x) \;=\; \frac{1}{x}\,. \tag{8.9}$$

De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\lim_{x\to-\infty} x^m \cdot \exp(x) \;=\; 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^{-m} \cdot \exp(x) \;=\; +\infty\,. \tag{8.10}$$

Preuve : Le fait que $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{+*}$ vient de (8.5). Le fait que l'exponentielle réelle soit C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée elle-même découle de la proposition 8.3 pour $\alpha = 1$. En particulier, l'exponentielle réelle est continue sur $\mathbb{R}$ (cf. proposition 6.18).

Comme la dérivée de l'exponentielle réelle est une fonction strictement positive (à savoir l'exponentielle réelle), l'exponentielle réelle est strictement croissante, d'après le corollaire 6.13. D'après la proposition 7.5, exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\exp(\mathbb{R})$ et sa bijection réciproque $\exp^{\langle -1\rangle} : \exp(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante. Comme la dérivée de l'exponentielle réelle ne s'annule jamais, on sait, par le corollaire 7.8, que $\exp^{\langle -1\rangle}$ est de classe C^1 sur $\exp(\mathbb{R})$ et on a, pour $x \in \exp(\mathbb{R})$,

$$\left(\exp^{\langle -1\rangle}\right)'(x) \;=\; \frac{1}{\left((\exp') \circ \exp^{\langle -1\rangle}\right)(x)} \;=\; \frac{1}{\left(\exp \circ \exp^{\langle -1\rangle}\right)(x)} \;=\; \frac{1}{x}\,,$$

ce qui donne (8.9) sur $\exp(\mathbb{R})$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour $x > 0$ et $N \geq m+1$, on a, par la proposition 3.9,

$$\frac{1}{x^m} \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \;=\; \frac{1}{x^m} \cdot \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{m+1}}{x^m \cdot \big((m+1)!\big)} + \frac{1}{x^m} \cdot \sum_{n=m+2}^{N} \frac{x^n}{n!} \;\geq\; \frac{x}{(m+1)!}$$

donc, par passage à la limite $N \to +\infty$ dans les inégalités (cf. proposition 3.43), on obtient

$$\frac{1}{x^m} \cdot \exp(x) \;\geq\; \frac{x}{(m+1)!}\,.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a, d'après les propositions 4.35 et 4.34,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-m} \cdot \exp(x) \;=\; +\infty\,.$$

Par inversion (cf. proposition 4.35) et produit (cf. proposition 4.31),

$$\lim_{x\to+\infty} (-1)^m x^m \cdot \frac{1}{\exp(x)} \;=\; 0\,.$$

Comme $\lim\limits_{t\to-\infty} (-t) = +\infty$, on a, par composition (cf. proposition 4.27),

$$\lim_{t\to-\infty} t^m \cdot \frac{1}{\exp(-t)} \;=\; 0\,.$$

Comme $\exp(-t) = 1/\exp(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\lim_{x\to-\infty} x^m \cdot \exp(x) \;=\; 0\,.$$

On a montré (8.10).

Il reste à vérifier que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$.

D'après (8.10) avec $m = 0$, on sait que

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) \;=\; +\infty\,.$$

Par la proposition 7.6, on en déduit que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$. □

Grâce à cette proposition 8.8, on peut montrer la surjectivité de l'exponentielle complexe, étudiée dans le paragraphe 8.1.

Proposition 8.9. *L'exponentielle complexe* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *est surjective i.e. tout complexe* $z \in \mathbb{C}^*$ *s'écrit* $\exp(c)$ *pour un* $c \in \mathbb{C}$.

Preuve : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a donc $|z| \neq 0$ et $z/|z| \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ étant défini dans la proposition 8.2). Par la proposition 8.4, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $z/|z| = \varphi(\beta) = \exp(i\beta)$. Comme $|z| > 0$, il existe, par la proposition 8.8, un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(\alpha) = |z|$. D'où

$$z \ = \ |z| \cdot \frac{z}{|z|} \ = \ \exp(\alpha) \cdot \exp(i\beta) \ = \ \exp(\alpha + i\beta)\,,$$

d'après (8.2). □

On introduit maintenant les logarithmes.

Définition 8.10. *La bijection réciproque* $\exp^{\langle -1 \rangle} : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de l'exponentielle réelle est appelée logarithme népérien et est noté* ln. *Pour* $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $\ln(a) \neq 0$ *car* $\exp(0) = 1$ *et le logarithme de base* a *est la fonction* $\mathrm{Log}_a : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par, pour* $x > 0$, $\mathrm{Log}_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$.

Proposition 8.11. *La fonction logarithme népérien* $\ln :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est de classe* C^1*, strictement croissante, bijective. Sa dérivée* $\ln' :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est donnée par, pour* $x > 0$, $\ln'(x) = 1/x$. *On a*

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) \ = \ -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) \ = \ +\infty\,. \tag{8.11}$$

On a

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) \ = \ 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \ = \ 0\,. \tag{8.12}$$

Pour $(x_1;x_2) \in]0;+\infty[^2$, *on a* $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.

Preuve : Par la proposition 8.8, on sait que $\ln = \exp^{\langle -1 \rangle}$ est C^1, strictement croissante et bijective $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. De plus, (8.9) donne une expression de sa dérivée.
Comme $\ln(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$ et comme ln est strictement croissante, on a, par les propositions 4.36 et 4.37,

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) \ = \ \inf \mathbb{R} \ = \ -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) \ = \ \sup \mathbb{R} \ = \ +\infty\,,$$

ce qui donne (8.11).
Pour $x > 0$, on a $x\ln(x) = \exp(\ln(x)) \cdot \ln(x)$. Comme $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{t\to-\infty} t \cdot \exp(t) = 0$, d'après (8.10) avec $m = 1$, on a, par composition (cf. proposition 4.27), $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. De plus, pour $x > 0$, on a $(\ln(x))/x = (\ln(x))/\exp(\ln(x))$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} t/\exp(t) = 0$, d'après (8.10) avec $m = 1$ et par inversion (cf. proposition 4.35), on a, par composition (cf. proposition 4.27), $\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))/x = 0$.
On a montré (8.12).
Pour $(x_1;x_2) \in]0;+\infty[^2$, soit $z_1 = \ln(x_1)$ et $z_2 = \ln(x_2)$. Par (8.2), $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$ et, en appliquant la fonction ln, on obtient $z_1 + z_2 = \ln(\exp(z_1 + z_2)) = \ln(\exp(z_1) \cdot \exp(z_2)) = \ln(x_1 \cdot x_2)$ soit $\ln(x_1 \cdot x_2) = z_1 + z_2 = \ln(x_1) + \ln(x_2)$. □

On termine ce paragraphe en déterminant la régularité maximale de l'exponentielle réelle et des logarithmes.

Proposition 8.12. *La fonction exponentielle réelle est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$. *La fonction logarithme népérien est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$. *Pour* $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, *le logarithme de base* a *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$.

Preuve : On rappelle que $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction exponentielle réelle, qui est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$ (cf. proposition 8.8), et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^\mathbb{R}$ la suite constante égale à f. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(p)$ de la proposition 6.27 est vraie, d'après la proposition 8.8. Par la proposition 6.27, f est de classe C^p sur $\mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, d'après la définition 6.23. Comme $\exp' = \exp$ ne s'annule pas, on déduit du corollaire 7.9, que $\ln = \exp^{\langle -1\rangle}$ est de classe C^∞ sur $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$. Comme $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*};\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (cf. remarque 6.24), le logarithme de base a est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$. □

8.3 Fonctions puissances.

Dans ce paragraphe, on construit plusieurs fonctions puissances. On dispose déjà des fonctions $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$, qui engendre l'espace vectoriel des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ (cf. définition 6.19). On va compléter cette collection en construisant notamment des fonctions $I \ni x \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et I un intervalle approprié.

Considérons la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$. Elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Elle n'est pas injective car -1 et 1 ont la même image. Cependant, sa restriction à $\mathbb{R}^+$ est strictement croissante continue donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur l'image de $\mathbb{R}^+$ (cf. paragraphe 7.2). La bijection réciproque est en fait définie sur $\mathbb{R}^+$ et est la fonction racine carrée et constitue un nouvel exemple de fonction puissance comme on le verra plus loin. Notons que la restriction à $\mathbb{R}^-$ de la fonction précédente est strictement décroissante et continue donc bijective de $\mathbb{R}^-$ sur son image. On aurait pu prendre cette fonction pour définir la racine carrée mais on a historiquement fait l'autre choix.
Si l'on considère la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$, on voit qu'elle est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur son image. La bijection réciproque nous donne la fonction racine cubique qui sera en fait définie sur $\mathbb{R}$.
La différence entre les deux cas précédents est liée à la parité de n dans $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$. On va procéder à une étude similaire mais dans le cas général $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}$ si n est impair et $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}^+$ si n est pair.

Proposition 8.13. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la $f_n : \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathcal{D}_n$, $f_n(x) = x^n$. La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathcal{D}_n$, continue sur $\mathcal{D}_n$ et bijective de $\mathcal{D}_n$ sur $\mathcal{D}_n$. Sa bijection réciproque $f_n^{\langle -1\rangle} : \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{D}_n$ est continue et strictement croissante. Elle est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f_n^{\langle -1\rangle}(0) = 0$. De plus, lorsque n est impair, $f_n^{\langle -1\rangle}$ est une fonction impaire (cf. définition 4.5).*
Cette bijection réciproque $f_n^{\langle -1\rangle}$ est appelée fonction racine n-ième et est notée par $\sqrt[n]{\cdot}$.

Pour n pair et non nul, $\sqrt[n]{\cdot}$ est donc une fonction de $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Pour n impair, $\sqrt[n]{\cdot}$ est donc une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour $n = 2$, on retrouve la fonction racine carrée i.e. $\sqrt[2]{\cdot} = \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Pour $n = 3$, la fonction racine cubique est $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Preuve de la proposition 8.13 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu dans la proposition 6.20 que l'application $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n$ est de classe C^1 et on a une expression pour sa dérivée. Donc f_n, sa restriction à $\mathcal{D}_n$, est de classe C^1 sur $\mathcal{D}_n$ et, pour $x \in \mathcal{D}_n$, $f_n'(x) = nx^{n-1}$. En particulier, f_n est continue sur $\mathcal{D}_n$ (cf. proposition 6.18).
Si n est impair alors $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_n'(x) = nx^{n-1} > 0$, car $n - 1$ est pair. Donc f_n est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ (cf. corollaire 6.13). On en déduit que f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R} = \mathcal{D}_n$.
Si n est pair et non nul alors $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_n'(x) = nx^{n-1} > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[= \mathcal{D}_n$ (cf. corollaire 6.13).
Par la proposition 7.5, f_n est donc bijective de $\mathcal{D}_n$ sur $f(\mathcal{D}_n)$ et sa bijection réciproque $f_n^{\langle -1\rangle} : f_n(\mathcal{D}_n) \longrightarrow \mathcal{D}_n$ est continue et strictement croissante. De plus, comme $f_n(0) = 0$, $f_n^{\langle -1\rangle}(0) = 0$.
On a vu, au paragraphe 4.3.3, que $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et, au paragraphe 4.2.4, que $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$.
Considérons le cas où n est impair. Pour $x \geq 1$, on a $f_n(x) \geq x$. Par le théorème des gendarmes (cf.

proposition 4.34), on a donc $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Pour $x \leq -1$, on a $f_n(x) \leq x$. Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 4.34), on a donc $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$. Grâce à la proposition 7.6, on en déduit que $f_n(\mathcal{D}_n) = f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = \mathcal{D}_n$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(-f_n^{\langle -1\rangle}(x)) = (-1)^n x = -x$, car n est impair et d'après la proposition 3.14, donc $f_n^{\langle -1\rangle}(-x) = -f_n^{\langle -1\rangle}(x)$. La fonction $f_n^{\langle -1\rangle}$ est donc impaire.
Voyons maintenant le cas où n est pair et non nul. Pour $x \geq 1$, on a $f_n(x) \geq x$. Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 4.34), on a donc $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Comme f_n est continue en 0, $\lim_{x\to 0} f_n(x) = f_n(0) = 0$. D'après la proposition 7.6, $f_n(]0;+\infty[) =]0;+\infty[$. Donc $f_n(\mathcal{D}_n) = f_n([0;+\infty[) = \{f_n(0)\} \cup f_n(]0;+\infty[) = \{0\} \cup]0;+\infty[= [0;+\infty[= \mathcal{D}_n$.
Dans les deux cas, comme $f_n^{\langle -1\rangle}$ est strictement croissante et $f_n^{\langle -1\rangle}(0) = 0$, $f_n^{\langle -1\rangle}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. $\square$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{D}_n$, on a, par la proposition 8.13 $\sqrt[n]{x^n} = x$. Donc $\sqrt[n]{\cdot}$ se comporte intuitivement comme une puisance $1/n$. Cependant, lorsque n est pair, elle n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$.
On peut se demander si l'on peut fabriquer une fonction puissance rationnelle et strictement positive de la façon suivante : comme un rationnel strictement positif s'écrit p/q avec $(p;q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pourait prendre $x \mapsto (\sqrt[q]{x})^p$. Mais, pourquoi pas $x \mapsto (\sqrt[q]{x^p})$?
On éclaircit cette question dans la proposition 8.14 suivante. Pour ce faire, on introduit une nouvelle fonction.
Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Lorsque q est pair, on étend la fonction $\sqrt[q]{\cdot}$, qui est seulement définie sur $\mathbb{R}^+$, à $\mathbb{R}$ par imparité en considérant l'application $\overline{\sqrt[q]{\cdot}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\overline{\sqrt[q]{x}} = \sqrt[q]{x}$, si $x \geq 0$, et par $\overline{\sqrt[q]{x}} = -\sqrt[q]{|x|}$, si $x < 0$. Lorsque q est impair, on pose $\overline{\sqrt[q]{\cdot}} = \sqrt[q]{\cdot}$, qui est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire (cf. définition 4.5).
On rappelle que, pour $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et pour $r > 0$, $r^{-p} \neq 0$ et $r^p := 1/r^{-p}$.

Proposition 8.14. *Soit $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$.*

1. *On suppose $p > 0$. On a*
$$\forall\, r \in \mathbb{R}^+\,, \quad \left(\sqrt[q]{r}\right)^p \;=\; \sqrt[q]{r^p}\,. \tag{8.13}$$
2. *On suppose $p < 0$. On a*
$$\forall\, r \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad \left(\sqrt[q]{r}\right)^p \;=\; \sqrt[q]{r^p}\,. \tag{8.14}$$
3. *On suppose q impair. On a*
$$\forall\, x < 0\,, \quad \left(\sqrt[q]{x}\right)^p \;=\; \sqrt[q]{x^p}\,.$$
4. *On suppose $p > 0$. On a*
$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \left(\overline{\sqrt[q]{x}}\right)^p \;=\; \overline{\sqrt[q]{x^p}}\,.$$
5. *On suppose $p < 0$. On a*
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*\,, \quad \left(\overline{\sqrt[q]{x}}\right)^p \;=\; \overline{\sqrt[q]{x^p}}\,.$$

On remarque que, dans le cadre cette proposition 8.14, pour q pair et $x < 0$, on ne peut appliquer $\sqrt[q]{\cdot}$ ni à x, ni à x^p si p est impair. En revanche, on peut l'appliquer à x^p si p est pair. Ceci explique l'hypothèse "q impair" dans 3.

Preuve de la proposition 8.14 :

1. Soit $p > 0$. Comme $\sqrt[q]{0} = 0$ et $0^p = 0$, on a $(\sqrt[q]{0})^p = 0 = \sqrt[q]{0^p}$. Pour $r > 0$, $\sqrt[q]{r^p} > 0$ et est l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathcal{D}_q$ donnée par $x^q = r^p$ (cf. propostion 8.13). Comme, par la proposition 3.14,
$$\left(\left(\sqrt[q]{r}\right)^p\right)^q \;=\; \left(\sqrt[q]{r}\right)^{pq} \;=\; \left(\left(\sqrt[q]{r}\right)^q\right)^p \;=\; r^p\,,$$
$(\sqrt[q]{r})^p$ est solution de l'équation précédente. Par unicité, $(\sqrt[q]{r})^p = \sqrt[q]{r^p}$.

2. Soit $p < 0$ et $r > 0$. Par 1, on a $(\sqrt[q]{r})^{-p} = \sqrt[q]{r^{-p}} > 0$. On a donc
$$\Big(\big(\sqrt[q]{r}\big)^p\Big)^q \;=\; \frac{1}{\big(\sqrt[q]{r^{-p}}\big)^q} \;=\; \frac{1}{r^{-p}} \;=\; r^p\,.$$
Or, $\sqrt[q]{r^p}$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathcal{D}_q$ donnée par $x^q = r^p$ (cf. proposition 8.13), donc $\sqrt[q]{r^p} = (\sqrt[q]{r})^p$.
3. Soit q impair. Pour $x < 0$, on a, par imparité de $\sqrt[q]{\cdot}$, par la proposition 3.14 et par 1 ou 2,
$$\big(\sqrt[q]{x}\big)^p \;=\; \big(-\sqrt[q]{-x}\big)^p \;=\; (-1)^p\cdot\big(\sqrt[q]{-x}\big)^p \;=\; (-1)^p\cdot\sqrt[q]{(-x)^p} \;=\; \sqrt[q]{(-1)^p\cdot(-x)^p} \;=\; \sqrt[q]{x^p}\,.$$
4. Soit $p > 0$. Lorsque $x \geq 0$, la formule à démontrer découle de (8.13). Pour $x < 0$, on peut refaire le calcul du 3 avec $\sqrt[q]{\cdot}$ remplacée la fonction impaire $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$.
5. Soit $p < 0$. Lorsque $x \geq 0$, la formule à démontrer découle de (8.14). Pour $x < 0$, on peut refaire le calcul du 3 avec $\sqrt[q]{\cdot}$ remplacée la fonction impaire $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$. □

Définition 8.15. *Soit $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{D}_p^P = \mathbb{R}^*$ si $p < 0$ et $\mathcal{D}_p^P = \mathbb{R}$ si $p > 0$. On appelle fonction puissance p/q l'application $\overline{P_{p/q}} : \mathcal{D}_p^P \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*
$$\forall\, x \in \mathcal{D}_p^P\,,\quad \overline{P_{p/q}}(x) \;:=\; \Big(\overline{\sqrt[q]{x}}\Big)^p \;=\; \overline{\sqrt[q]{x^p}}\,.$$

On constate des limitations déplaisantes de cette construction. Tout d'abord, même lorsque la fonction $\overline{P_{p/q}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, elle est en général seulement continue. Par exemple, on peut vérifier que $\overline{P_{1/2}} = \overline{\sqrt[2]{\cdot}}$ n'est pas dérivable en 0. C'est la même chose avec $\overline{P_{1/3}} = \overline{\sqrt[2]{\cdot}}$ et $\overline{P_{2/3}}$. D'autre part, on ne voit pas comment généraliser cette construction pour obtenir une fonction "puissance α" avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
C'est pourquoi une attitude différente est adoptée dans la littérature mathématique, une attitude que l'on va suivre ci-dessous.

Proposition 8.16. *Soit $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a*
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}\,,\quad \sqrt[q]{x} \;=\; \exp\left(\frac{1}{q}\cdot\ln(x)\right) \;=\; e^{\frac{1}{q}\cdot\ln(x)} \tag{8.15}$$
et
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}\,,\quad \overline{P_{p/q}}(x) \;=\; \exp\left(\frac{p}{q}\cdot\ln(x)\right) \;=\; e^{\frac{p}{q}\cdot\ln(x)}\,. \tag{8.16}$$

Preuve : Soit $x > 0$. Par (8.4) et la définition de ln,
$$\left(\exp\left(\frac{1}{q}\cdot\ln(x)\right)\right)^q \;=\; \exp\big(\ln(x)\big) \;=\; x$$
donc $e^{\frac{1}{q}\cdot\ln(x)}$ est solution de l'équation d'inconnue $t \in \mathbb{R}$ donnée par $f_q(t) = x$ dont l'unique solution est $\sqrt[q]{x}$. On a donc montré (8.15).
Par (8.4) et (8.15),
$$\exp\left(\frac{p}{q}\cdot\ln(x)\right) \;=\; \left(\exp\left(\frac{1}{q}\cdot\ln(x)\right)\right)^p \;=\; \big(\sqrt[q]{x}\big)^p \;=\; \overline{P_{p/q}}(x)\,,$$
d'après la définition de $\overline{P_{p/q}}$ dans la définition 8.15. □

Ce résultat nous conduit naturellement à la définition suivante d'une fonction "puissance α" avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 8.17. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction puissance α est la fonction $P_\alpha : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ définie par*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad P_\alpha(x) \ := \ \exp\left(\alpha \cdot \ln(x)\right) \ = \ e^{\alpha \cdot \ln(x)}\,. \tag{8.17}$$

Lorsque α est rationnel non nul et s'écrit p/q avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on voit, par la proposition 8.16, que P_α est la restriction à $\mathbb{R}^{+*}$ de $\overline{P_{p/q}}$. On voit aussi, pour tout α, que P_α est une fonction C^1 comme composée de fonctions C^1. De plus, on a une expression simple de sa dérivée :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad P'_\alpha(x) \ = \ \frac{\alpha}{x} \cdot P_\alpha(x) \ = \ \alpha \cdot e^{\alpha \cdot \ln(x) \,-\, \ln(x)} \ = \ \alpha \cdot P_{\alpha-1}(x)$$

qui généralise bien la dérivée des fonctions polynômiales (cf. proposition 6.20).

On détermine maintenant la régularité des fonctions introduites dans ce paragraphe.

Proposition 8.18. *Soit $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Sur $\mathbb{R}^{+*}$, les fonctions $\sqrt[q]{\cdot}$ et $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$, qui coïncident, $\overline{P_{p/q}}$ et P_α sont toutes de classe C^∞.*
2. *Sur $\mathbb{R}^{-*}$, les fonctions $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$ et $\overline{P_{p/q}}$ sont de classe C^∞.*

Preuve :

1. D'après les formules (8.15), (8.16) et (8.17), et d'après la proposition 6.29, les fonctions $\sqrt[q]{\cdot}$ et $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$, $\overline{P_{p/q}}$ et P_α sont toutes de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. La restriction à $\mathbb{R}^{-*}$ de la fonction valeur absolue $|\cdot|$ est une fonction polynôme à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{-*}$, par la proposition 6.30. Par composition avec la restriction de $-\sqrt[q]{\cdot}$ à $\mathbb{R}^{+*}$, qui est de classe C^∞ (proposition 6.29), la fonction $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{-*}$ (cf. proposition 6.29). Par la proposition 6.30, la fonction $\mathbb{R}^{-*} \ni x \mapsto x^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^∞ et, par la proposition 6.29, la fonction $\mathbb{R}^{-*} \ni x \mapsto x^p$, avec $p \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$, est aussi de classe C^∞. Donc, par composition avec la restriction de $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$ à $\mathbb{R}^{-*}$ (cf. proposition 6.29), $\overline{P_{p/q}}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{-*}$. □

8.4 Fonctions circulaires.

Ce paragraphe est consacré à l'étude des fonctions circulaires sinus, cosinus, tangente et cotangente, ainsi qu'à leurs fonctions réciproques. On rappelle que $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C};\, |z| = 1\}$.

Définition 8.19. *Les parties réelle et imaginaire de la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$, donnée par $\varphi(t) = \exp(it)$ (cf. définition 4.5 et proposition 8.4), sont appelées respectivement fonction sinus et fonction cosinus. On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \Re\varphi(x)$ et $\cos(x) = \Im\varphi(x)$.*

Des propriétés de la fonction φ (cf. proposition 8.4), on déduit les propriétés suivantes de sinus et cosinus.

Proposition 8.20. *Les fonctions $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$ et $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Leurs dérivées sont données par $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$. Elles sont 2π-périodiques (dans le sens donné par la proposition 8.4). La fonction $\sin$ est impaire et la fonction $\cos$ est paire (cf. définition 4.5). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$.*
La fonction $\sin$ est strictement positive sur $]0;\pi[$, strictement négative sur $]-\pi;0[$. On a $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$, $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\sin(\pi/2) = 1$. Elle est strictement croissante sur $[-\pi/2;\pi/2]$ et strictement décroissante sur $[\pi/2;\pi]$ et sur $[-\pi : -\pi/2]$.
La fonction $\cos$ est strictement positive sur $]-\pi/2;\pi/2[$, strictement négative sur $]-\pi;-\pi/2[$ et sur $]\pi/2;\pi[$. On a $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0 = \cos(-\pi/2)$ et $\cos(\pi) = -1$. Elle est strictement croissante sur $[-\pi : 0]$ et strictement décroissante sur $[0;\pi]$.

Preuve : On renvoit à celle du lemme 9.11. $\square$

Proposition 8.21. *La restriction de la fonction* sin *à l'intervalle* $[-\pi/2;\pi/2]$ *est bijective de* $[-\pi/2;\pi/2]$ *sur* $[-1;1]$. *Sa bijection réciproque, appelée Arcsinus et notée* Arcsin : $[-1;1] \longrightarrow [-\pi/2;\pi/2]$, *est impaire, strictement croissante, continue sur* $[-1;1]$ *et dérivable sur* $]-1;1[$. *De plus,*

$$\forall\, x \in]-1;1[\,, \quad \mathrm{Arcsin}'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1\,-\,x^2}}\,. \tag{8.18}$$

La restriction de la fonction cos *à l'intervalle* $[0;\pi]$ *est bijective de* $[0;\pi]$ *sur* $[-1;1]$. *Sa bijection réciproque, appelée Arccosinus et notée* Arccos : $[-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$ *est strictement décroissante, continue sur* $[-1;1]$ *et dérivable sur* $]-1;1[$. *De plus,*

$$\forall\, x \in]-1;1[\,, \quad \mathrm{Arccos}'(x) \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1\,-\,x^2}}\,. \tag{8.19}$$

Pour tout $x \in [-1;1]$, $\mathrm{Arccos}\,(x) + \mathrm{Arcsin}\,(x) = \pi/2$.

On peut remarquer que sin est aussi bijective de $[\pi/2;3\pi/2]$ sur $[-1;1]$, de $[7\pi/2;9\pi/2]$ sur $[-1;1]$. Le choix de l'ensemble $[-\pi/2;\pi/2]$ pour définir la fonction Arcsin est donc arbitraire. Il a cependant le mérite de préserver l'imparité de sinus et de la transmettre à Arcsinus. Dans le cas de cosinus, le choix de l'intervalle $[0;\pi]$ est aussi arbitraire.

Preuve de la proposition 8.21 : Par la proposition 8.20, sin est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2;\pi/2]$ donc, par la proposition 7.5, elle est bijective de $[-\pi/2;\pi/2]$ sur $\sin([-\pi/2;\pi/2])$ et sa bijection réciproque Arcsin est continue et strictement croissante sur $\sin([-\pi/2;\pi/2])$.
Toujours par la proposition 8.20, $\sin(\pi/2) = 1$ et, par imparité, $\sin(-\pi/2) = -1$. D'après la proposition 7.6 et la continuité de sinus, $\sin(]-\pi/2;\pi/2[) =]-1;1[$. D'où

$$\sin\big([-\pi/2;\pi/2]\big) \;=\; \big\{\sin(-\pi/2)\,;\,\sin(\pi/2)\big\} \cup \sin\big(]-\pi/2;\pi/2[\big) \;=\; [-1;1]\,.$$

Comme $\sin' = \cos$ ne s'annule pas sur $]-\pi/2;\pi/2[$ et y est strictement positive (cf. proposition 8.20), la proposition 7.7 garantit que Arcsin est dérivable sur $\sin(]-\pi/2;\pi/2[) =]-1;1[$ et que, pour $x \in]-1;1[$,

$$\mathrm{Arcsin}'(x) \;=\; \frac{1}{\sin'\big(\mathrm{Arcsin}\,(x)\big)} \;=\; \frac{1}{\cos\big(\mathrm{Arcsin}\,(x)\big)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1\,-\,\big(\sin\big(\mathrm{Arcsin}\,(x)\big)\big)^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1\,-\,x^2}}\,.$$

Pour $x \in [-1;1]$, on a $-x \in [-1;1]$ et, puisque sinus est impaire (cf. proposition 8.20), $\sin(-\mathrm{Arcsin}\,(x)) = -\sin(\mathrm{Arcsin}\,(x)) = -x$ donc $-\mathrm{Arcsin}\,(x)$ est solution de l'équation d'inconnue $t \in [-\pi/2;\pi/2]$ donnée par $\sin(t) = -x$, dont l'unique solution est $\mathrm{Arcsin}\,(-x)$ d'après la bijectivité de sin de $[-\pi/2;\pi/2]$ sur $[-1;1]$ (cf. proposition 7.2). D'où $-\mathrm{Arcsin}\,(x) = \mathrm{Arcsin}\,(-x)$. On a montré que Arcsin est impaire.
Par la proposition 8.20, cos est continue et strictement décroissante sur $[0;\pi]$ donc, par la proposition 7.5, elle est bijective de $[0;\pi]$ sur $\cos([0;\pi])$ et sa bijection réciproque Arccos est continue et strictement décroissante sur $\cos([0;\pi])$.
Par la proposition 8.20, $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. D'après la proposition 7.6 et la continuité de cosinus, $\cos(]0;\pi[) =]-1;1[$. D'où

$$\cos\big([0;\pi]\big) \;=\; \big\{\cos(0)\,;\,\cos(\pi)\big\} \cup \cos\big(]0;\pi[\big) \;=\; [-1;1]\,.$$

Comme $\cos' = -\sin$ ne s'annule pas sur $]0;\pi[$ et y est strictement négative (cf. proposition 8.20), la proposition 7.7 garantit que Arccos est dérivable sur $\cos(]0;\pi[) =]-1;1[$ et que, pour $x \in]-1;1[$,

$$\mathrm{Arccos}'(x) \;=\; \frac{1}{\cos'\big(\mathrm{Arccos}\,(x)\big)} \;=\; \frac{1}{-\sin\big(\mathrm{Arccos}\,(x)\big)} \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1\,-\,\big(\cos\big(\mathrm{Arccos}\,(x)\big)\big)^2}} \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1\,-\,x^2}}\,.$$

Par les propositions 4.31 et 6.6, la fonction Arccos + Arcsin est continue sur $[-1;1]$, elle est dérivable sur $]-1;1[$ et, d'après (8.18) et (8.19), sa dérivée est nulle. Par le corollaire 6.13, elle est constante sur $[-1;1]$ égale à $\mathrm{Arccos}\,(0) + \mathrm{Arcsin}\,(0) = (\pi/2) + 0 = \pi/2$. $\square$

Attention : on a, certes, pour tout $x \in [-\pi/2;\pi/2]$, $\sin(\mathrm{Arcsin}\,(x)) = x$ et $\mathrm{Arcsin}\,(\sin(x)) = x$ mais, pour $x \notin [-\pi/2;\pi/2]$, $\mathrm{Arcsin}\,(\sin(x)) \neq x$, puisque Arcsin est à valeurs dans $[-\pi/2;\pi/2]$.

D'après la proposition 8.20, l'ensemble des points d'annulation de la fonction cosinus et celui de la fonction sinus sont respectivement les ensembles

$$\mathcal{D}_c \;:=\; \Big\{t \in \mathbb{R};\, \Big(t - \frac{\pi}{2}\Big) \,\in\, \pi\mathbb{Z}\Big\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_s \;:=\; \big\{t \in \mathbb{R};\, t \in \pi\mathbb{Z}\big\}\,.$$

Définition 8.22. *On appelle fonction tangente la fonction* $\tan : \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par, pour* $x \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. *On appelle fonction cotangente la fonction* $\mathrm{cotan} : \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_s \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par, pour* $x \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_s$, $\mathrm{cotan}\,(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{1}{\tan(x)}$.

On remarque que les domaines de définitions de tangente et cotangente vérifient

$$\mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c \;:=\; \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, \frac{\pi}{2} + k\pi\Big[\quad \text{et} \quad \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_s \;:=\; \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big]k\pi\,;\,(k+1)\pi\big[\,. \tag{8.20}$$

On remarque aussi qu'ils sont symétriques par rapport à 0 :

$$\Big(\big(x \,\in\, \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c\big) \iff \big(-x \,\in\, \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c\big)\Big) \quad \text{et} \quad \Big(\big(x \,\in\, \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_s\big) \iff \big(-x \,\in\, \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_s\big)\Big)\,.$$

Proposition 8.23. *La fonction tangente est impaire. Elle est strictement croissante et de classe* C^1 *sur chaque intervalle composant son domaine de définition. De plus,*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c\,, \quad \tan'(x) \;=\; 1 \,+\, \big(\tan(x)\big)^2 \;=\; \frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}\,.$$

La restriction de la fonction tan *à l'intervalle* $]-\pi/2;\pi/2[$ *est bijective de* $]-\pi/2;\pi/2[$ *sur* $\mathbb{R}$. *Sa bijection réciproque, appelée Arctangente et notée* $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2;\pi/2[$, *est impaire, strictement croissante, dérivable (donc continue) sur* $\mathbb{R}$. *De plus,*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Arctan}'(x) \;=\; \frac{1}{1 \,+\, x^2}\,. \tag{8.21}$$

La fonction cotangente est impaire. Elle est strictement décroissante et de classe C^1 *sur chaque intervalle composant son domaine de définition. De plus,*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c\,, \quad \mathrm{cotan}'(x) \;=\; -\Big(1 \,+\, \big(\mathrm{cotan}\,(x)\big)^2\Big) \;=\; \frac{-1}{\big(\sin(x)\big)^2}\,.$$

La restriction de la fonction cotan *à l'intervalle* $]0;\pi[$ *est bijective de* $]0;\pi[$ *sur* $\mathbb{R}$. *Sa bijection réciproque, appelée Arccotangente et notée* $\mathrm{Arccotan} : \mathbb{R} \longrightarrow]0;\pi[$, *est strictement décroissante, dérivable (donc continue) sur* $\mathbb{R}$. *De plus,*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Arccotan}'(x) \;=\; \frac{-1}{1 \,+\, x^2}\,. \tag{8.22}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}\,(x) + \mathrm{Arccotan}\,(x) = \pi/2$. *De plus,*

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Arctan}\,(x) \;=\; -\frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}\,(x) \;=\; \frac{\pi}{2}\,, \tag{8.23}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Arccotan}\,(x) \;=\; \pi \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Arccotan}\,(x) \;=\; 0\,. \tag{8.24}$$

Preuve : Comme le domaine de définition de tangente est symétrique par rapport à 0, comme cosinus est paire, comme sinus est impair, on voit que tangente est impaire.
Pour $k \in \mathbb{Z}$, soit $I_k =]-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k[$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé, on sait, par la proposition 8.20, que sin et cos sont de classe C^1 sur I_k et que cos y est strictement positive. Donc, par la proposition 6.18, tan est de classe C^1 sur I_k et, pour $x \in I_k$, on a

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)}{\cos(x)} + \sin(x) \cdot \frac{-1}{\big(\cos(x)\big)^2} \cdot \cos'(x) = 1 + \frac{\big(\sin(x)\big)^2}{\big(\cos(x)\big)^2} = 1 + \big(\tan(x)\big)^2 \\ &= \frac{\big(\cos(x)\big)^2 + \big(\sin(x)\big)^2}{\big(\cos(x)\big)^2} = \frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2} > 0\,.\end{aligned}$$

En particulier, tan est strictement croissante sur I_k, par le corollaire 6.13.
Comme tan est aussi continue (cf. proposition 6.18), on déduit de la proposition 7.5 que tan est bijective de $I_0 =]-\pi/2; \pi/2[$ sur $\tan(I_0)$ et que sa bijection réciproque Arctan est strictement croissante et continue sur $\tan(I_0)$.
Comme cosinus est continue, strictement positive sur I_0, et comme $\cos(-\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, on a, d'après la proposition 4.35,

$$\lim_{x \to (-\pi/2)^+} \frac{1}{\cos(x)} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{1}{\cos(x)} = +\infty\,.$$

Donc, comme sinus est continue, $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\sin(\pi/2) = 1$, on déduit de la proposition 4.35 que

$$\lim_{x \to (-\pi/2)^+} \tan(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan(x) = +\infty\,.$$

Par la proposition 7.6, $\tan(I_0) = \mathbb{R}$.
Comme $\tan' \geq 1$, $\tan'$ ne s'annule pas donc, par la proposition 7.7, Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'\big(\mathrm{Arctan}\,(x)\big)} = \frac{1}{1 + \big(\tan\big(\mathrm{Arctan}\,(x)\big)\big)^2} = \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, puisque tangente est impaire, $\tan(-\mathrm{Arctan}\,(x)) = -\tan(\mathrm{Arctan}\,(x)) = -x$ donc $-\mathrm{Arctan}\,(x)$ est solution de l'équation d'inconnue $t \in]-\pi/2; \pi/2[$ donnée par $\tan(t) = -x$, dont l'unique solution est $\mathrm{Arctan}\,(-x)$ d'après la bijectivité de tan de $I_0 =]-\pi/2; \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. D'où $-\mathrm{Arctan}\,(x) = \mathrm{Arctan}\,(-x)$. On a montré que Arctan est impaire.
Comme le domaine de définition de cotangente est symétrique par rapport à 0, comme cosinus est paire, comme sinus est impair, on voit que cotangente est impaire.
Pour $k \in \mathbb{Z}$, soit $J_k =]\pi k; \pi(k+1)[$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé, on sait, par la proposition 8.20, que sin et cos sont de classe C^1 sur J_k et que sin y est strictement positive. Donc, par la proposition 6.18, cotan est de classe C^1 sur J_k et, pour $x \in J_k$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{cotan}'(x) &= \frac{\cos'(x)}{\sin(x)} + \cos(x) \cdot \frac{-1}{\big(\sin(x)\big)^2} \cdot \sin'(x) = -1 - \frac{\big(\cos(x)\big)^2}{\big(\sin(x)\big)^2} = -1 - \big(\mathrm{cotan}\,(x)\big)^2 \\ &= -\frac{\big(\cos(x)\big)^2 + \big(\sin(x)\big)^2}{\big(\sin(x)\big)^2} = \frac{-1}{\big(\sin(x)\big)^2} < 0\,.\end{aligned}$$

En particulier, cotan est strictement décroissante sur J_k, par le corollaire 6.13.
Comme cotan est aussi continue (cf. proposition 6.18), on déduit de la proposition 7.5 que cotan est bijective de $J_0 =]0; \pi[$ sur $\mathrm{cotan}\,(J_0)$ et que sa bijection réciproque Arccotan est strictement décroissante et continue sur $\mathrm{cotan}\,(J_0)$.
Comme sinus est continue, strictement positive sur J_0, et comme $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$, on a, d'après la proposition 4.35,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin(x)} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \pi^-} \frac{1}{\sin(x)} = +\infty\,.$$

Donc, comme cosinus est continue, $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, on déduit de la proposition 4.35 que

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{cotan}(x) \;=\; +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \pi^-} \operatorname{cotan}(x) \;=\; -\infty\,.$$

Par la proposition 7.6, $\operatorname{cotan}(J_0) = \mathbb{R}$.
Comme $\operatorname{cotan}' \leq -1$, cotan' ne s'annule pas donc, par la proposition 7.7, Arccotan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arccotan}'(x) \;=\; \frac{1}{\operatorname{cotan}'\big(\operatorname{Arccotan}(x)\big)} \;=\; \frac{1}{-1 \,-\, \big(\operatorname{cotan}\big(\operatorname{Arccotan}(x)\big)\big)^2} \;=\; \frac{-1}{1 \,+\, x^2}\,.$$

Par les propositions 4.31 et 6.6, la fonction Arctan + Arccotan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, d'après (8.21) et (8.22), sa dérivée est nulle. Par le corollaire 6.13, elle est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $\operatorname{Arctan}(0) + \operatorname{Arccotan}(0) = 0 + (\pi/2) = \pi/2$.
Comme Arctan est croissante,

$$\inf \operatorname{Arctan}(\mathbb{R}) \;=\; \inf \Big]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\Big[\;=\; -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \sup \operatorname{Arctan}(\mathbb{R}) \;=\; \sup \Big]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\Big[\;=\; \frac{\pi}{2}\,,$$

la proposition 4.36 donne (8.23). Comme Arccotan est décroissante,

$$\inf \operatorname{Arccotan}(\mathbb{R}) \;=\; \inf\,]0\,;\,\pi[\; = \;0 \quad \text{et} \quad \sup \operatorname{Arccotan}(\mathbb{R}) \;=\; \sup\,]0\,;\,\pi[\; = \;\pi\,,$$

la proposition 4.36 donne (8.24). □

On détermine maintenant la régularité des fonctions circulaires.

Proposition 8.24. *On a les régularités C^∞ suivantes :*

1. *Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, donnée par $f_\alpha(t) = \exp(\alpha t)$, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Les fonctions* sin *et* cos *sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*
3. *La fonction* tan *est de classe C^∞ sur tout intervalle I non réduit à un point et inclu dans $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_c$ tandis que la fonction* cotan *est de classe C^∞ sur tout intervalle J non réduit à un point et inclu dans $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_s$ (les ensembles $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_c$ et $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_s$ étant définis dans* (8.20)*).*
4. *Les fonctions* Arcsin *et* Arccos *sont de classe C^∞ sur $]-1;1[$.*
5. *Les fonctions* Arctan *et* Arccotan *sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

Preuve : On rappelle que $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Par la proposition 8.3, on sait que f_α est de classe C^1 donc aussi de classe C^0 (cf. proposition 6.18) et que $f'_\alpha = \alpha f_\alpha$. Soit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^\mathbb{R}$ la suite définie par, pour $p \in \mathbb{N}$, $g_p = \alpha^p f_\alpha$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $g_p \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \subset C^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$, d'après la proposition 6.18. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $g'_p = \alpha^p f'_\alpha = \alpha^{p+1} f_\alpha = g_{p+1}$ (cf. proposition 6.6) donc la propriété $\mathcal{P}(p)$ de la proposition 6.27 est vraie. Par cette proposition 6.27, f_α est de classe C^p sur $\mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc $f_\alpha \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, d'après la définition 6.23.
2. Comme $\cos = (f_i + f_{-i})/2$ et $\sin = (f_i - f_{-i})/(2i)$, on déduit du 1 et de la proposition 6.29 que sin et cos sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3. Comme $\tan = \sin / \cos$ sur I et $\operatorname{cotan} = \cos / \sin$ sur J, on déduit du 2 et de la proposition 6.29 que tan est C^∞ sur I et cotan est de classe C^∞ sur J.
4. Par le 2, on peut appliquer le corollaire 7.9 à sin et cos. Cela montre que Arcsin est de classe C^∞ sur tout intervalle I non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\sin)$ et que Arccos est de classe C^∞ sur tout intervalle J non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\cos)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\sin) \;&=\; \big\{y \in \sin\big([-\pi/2;\pi/2]\big)\,; \quad \sin'\big(\operatorname{Arcsin}(y)\big) \;\neq\; 0\big\} \\
&=\; \big\{y \in \sin\big([-\pi/2;\pi/2]\big)\,; \quad \cos\big(\operatorname{Arcsin}(y)\big) \;\neq\; 0\big\} \\
&=\; \big\{y \in [-1;1]\,; \quad \operatorname{Arcsin}(y) \;\notin\; \{-\pi/2\,;\,\pi/2\}\big\} \;=\;]-1;1[\,.
\end{aligned}$$

Donc Arcsin est de classe C^∞ sur $]-1;1[$. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\cos) &= \big\{y \in \cos\big([0;\pi]\big)\,;\quad \cos'\big(\mathrm{Arccos}(y)\big) \neq 0\big\}\\ &= \big\{y \in \cos\big([0;\pi]\big)\,;\quad -\sin\big(\mathrm{Arccos}(y)\big) \neq 0\big\}\\ &= \big\{y \in [-1;1]\,;\quad \mathrm{Arccos}(y) \notin \{0\,;\,\pi\}\big\} \;=\;]-1;1[\,.\end{aligned}$$

Donc Arccos est de classe C^∞ sur $]-1;1[$.

5. Par le 3, on peut appliquer le corollaire 7.9 à tan et cotan. Cela montre que Arctan est de classe C^∞ sur tout intervalle I non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\tan)$ et que Arccotan est de classe C^∞ sur tout intervalle J non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\mathrm{cotan})$. Par la proposition 8.23, ni $\tan'$, ni cotan' ne s'annule donc $\mathcal{P}(\tan) = \mathbb{R} = \mathcal{P}(\mathrm{cotan})$. Donc Arctan et Arccotan sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. □

8.5 Fonctions hyperboliques.

Ce paragraphe est consacré à l'étude des fonctions hyperboliques sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique, ainsi qu'à leurs fonctions réciproques.

Définition 8.25. *Les parties impaire et paire de l'exponentielle réelle sont appelées respectivement fonction sinus hyperbolique et fonction cosinus hyperbolique. On les définit et note, respectivement, par, pour $x \in \mathbb{R}$, $sh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ et $ch(x) = (e^x + e^{-x})/2$.*

Des propriétés de l'exponentielle réelle, on tire les propriétés suivantes de ces fonctions.

Proposition 8.26. *Tandis que la fonction $sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est impaire, la fonction $ch : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est paire. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = 1$. Ces fonctions sont toutes deux de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On a $sh' = ch$ et $ch' = sh$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|sh(x)| < ch(x)$.*
La fonction sh est strictement croissante, $sh(0) = 0$. Elle est strictement négative sur $]-\infty : 0[$ et strictement positive sur $]0;+\infty[$.
La fonction ch est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, strictement croissante sur $[0;+\infty[$, $ch(0) = 1$. Elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} sh(x) \;=\; -\infty\,,\quad \lim_{x\to-\infty} ch(x) \;=\; +\infty\,,\quad \lim_{x\to+\infty} sh(x) \;=\; +\infty\,,\quad \lim_{x\to+\infty} ch(x) \;=\; +\infty\,. \tag{8.25}$$

Preuve : Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(-x) = (e^{-x} - e^x)/2 = -\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(-x) = (e^{-x} + e^x)/2 = \mathrm{ch}(x)$. Par la définition 4.5, sh est impaire et ch est paire. Par la proposition 8.8, on a, pour $t \geq 0$, $\mathrm{ch}(t) \geq e^t/2 > 0$, et $e^t \geq e^0 = 1 \geq e^{-t}$ donc $\mathrm{sh}(t) \geq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme ch est paire, on a $\mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(|x|)$ et, comme sh est impaire, on a $|\mathrm{sh}(x)| = \mathrm{sh}(|x|)$. Donc

$$\mathrm{ch}(x) \,-\, |\mathrm{sh}(x)| \;=\; \mathrm{ch}(|x|) \,-\, \mathrm{sh}(|x|) \;=\; \frac{e^{-|x|} \,+\, e^{-|x|}}{2} \;=\; e^{-|x|} \;>\; 0\,,$$

par la proposition 8.8. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2 \,-\, \big(\mathrm{sh}(x)\big)^2 \;=\; \big(\mathrm{ch}(x) \,-\, \mathrm{sh}(x)\big)\cdot\big(\mathrm{ch}(x) \,+\, \mathrm{sh}(x)\big) \;=\; e^{-x}\cdot e^x \;=\; 1\,,$$

d'après (8.3). Comme $\mathrm{ch}(x) \geq e^x/2 > 0$ (cf. (8.5)), comme $(\mathrm{ch}(x))^2 = 1 + (\mathrm{sh}(x))^2 \geq 1$ et comme $0 \leq x \mapsto x^2$ est strictement croissante, la proposition $(\mathrm{ch}(x) < 1)$ est fausse donc $\mathrm{ch}(x) \geq 1$. Enfin, on voit que $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\mathrm{sh}(0) = 0$.
Par la proposition 8.8, l'exponentielle réelle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Comme il en est de même de la

fonction polynômiale $x \mapsto -x$, la fonction $x \mapsto \exp(-x)$ est aussi de classe C^1 et, par somme, sh et ch sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (cf. proposition 6.18). De plus, d'après la proposition 6.6, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sh}'(x) \;=\; \frac{1}{2}\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot e^{-x}\cdot(-1) \;=\; \mathrm{ch}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}'(x) \;=\; \frac{1}{2}\cdot e^x + \frac{1}{2}\cdot e^{-x}\cdot(-1) \;=\; \mathrm{sh}(x)\,.$$

Comme ch est strictement positive, sh est strictement croissante (cf. corollaire 6.13). Comme $\mathrm{sh}(0) = 0$, sh est strictement négative sur $]-\infty : 0[$ et strictement positive sur $]0; +\infty[$. Donc, par le corollaire 6.13, ch est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Par (8.10) avec $m = 0$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) \;=\; +\infty\,.$$

Donc, par les opérations sur les limites (cf. proposition 4.35), on a l'existence et la valeur des quatres limites de l'énoncé. □

Proposition 8.27. *La fonction sh est bijective de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$. *Sa bijection réciproque, appelée Argument sh et notée* $\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est impaire, strictement croissante et dérivable. De plus,*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Argsh}'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{8.26}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Argsh}(x) \;=\; -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Argsh}(x) \;=\; +\infty\,. \tag{8.27}$$

La restriction de la fonction ch à l'intervalle $\mathbb{R}^+$ *est bijective de* $\mathbb{R}^+$ *sur* $[1; +\infty[$. *Sa bijection réciproque, appelée Argument ch et notée* $\mathrm{Argch} : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$, *est strictement croissante, continue sur* $[1; +\infty]$ *et dérivable sur* $]1; +\infty[$. *De plus,*

$$\forall\, x \in]1; +\infty[\,, \quad \mathrm{Argch}'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \tag{8.28}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Argch}(x) \;=\; +\infty\,. \tag{8.29}$$

Enfin, on a

$$\forall\, y \in \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Argsh}(y) \;=\; \ln\Big(y + \sqrt{y^2 + 1}\Big) \tag{8.30}$$

et

$$\forall\, y \in [1; +\infty[\,, \quad \mathrm{Argch}(y) \;=\; \ln\Big(y + \sqrt{y^2 - 1}\Big)\,. \tag{8.31}$$

Preuve : Par la proposition 8.26, sh est continue et strictement croissante. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{sh}(\mathbb{R})$ et sa bijection réciproque Argsh est continue, strictement croissante sur $\mathrm{sh}(\mathbb{R})$, par la proposition 7.5.
D'après les limites de sh dans (8.25), on déduit de la proposition 7.6 que $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Comme la dérivée ch de sh ne s'annule pas (cf. proposition 8.26), on déduit de la proposition 7.7 que Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Argsh}'(x) \;=\; \frac{1}{\mathrm{sh}'\big(\mathrm{Argsh}(x)\big)} \;=\; \frac{1}{\mathrm{ch}\big(\mathrm{Argsh}(x)\big)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + \big(\mathrm{sh}\big(\mathrm{Argsh}(x)\big)\big)^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,,$$

par la proposition 8.26.
Pour $x \in \mathbb{R}$, puisque sh est impaire (cf. proposition 8.26), $\mathrm{sh}(-\mathrm{Argsh}(x)) = -\mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}(x)) = -x$ donc $-\mathrm{Argsh}(x)$ est solution de l'équation d'inconnue $t \in \mathbb{R}$ donnée par $\mathrm{sh}(t) = -x$, dont l'unique solution est $\mathrm{Argsh}(-x)$ d'après la bijectivité de sh de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (cf. proposition 7.2). D'où $\mathrm{Argsh}(-x) = -\mathrm{Argsh}(x)$.

On a montré que Argsh est impaire.
Comme Argsh est strictement croissante, on a, par la proposition 4.36,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Argsh}(x) \;=\; \inf \mathrm{Argsh}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Argsh}(x) \;=\; \sup \mathrm{Argsh}(\mathbb{R})$$

et comme Argsh$(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}$, puisque Argsh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on obtient (8.27).
Par la proposition 8.26, ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur ch$(\mathbb{R}^+)$ et sa bijection réciproque Argsh est continue, strictement croissante sur ch$(\mathbb{R}^+)$, par la proposition 7.5.
D'après la limite en $+\infty$ de ch dans (8.25) et d'après le fait que ch est continue, on déduit de la proposition 7.6 que ch$(]0;+\infty[) =]1;+\infty[$. Donc ch$(\mathbb{R}^+) = \{\mathrm{ch}(0)\} \cup \mathrm{ch}(]0;+\infty[) = [1;+\infty[$.
Comme la dérivée sh de ch ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, on déduit de la proposition 7.7 que Argch est dérivable sur ch$(]0;+\infty[) =]1;+\infty[$ et que, pour $x > 1$,

$$\mathrm{Argch}'(x) \;=\; \frac{1}{\mathrm{ch}'\big(\mathrm{Argch}(x)\big)} \;=\; \frac{1}{\mathrm{sh}\big(\mathrm{Argch}(x)\big)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\big(\mathrm{ch}\big(\mathrm{Argch}(x)\big)\big)^2 \,-\, 1}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x^2 \,-\, 1}}\,,$$

par la proposition 8.26.
Comme Argch est strictement croissante, on a, par la proposition 4.36,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Argch}(x) \;=\; \sup \mathrm{Argch}\big([1;+\infty[\big)$$

et comme Argch$([1;+\infty[)$ est $\mathbb{R}^+$, puisque Argch est bijective de $[1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient (8.29).
Soit $y \in \mathbb{R}$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$, d'après les propriétés de l'exponentielle réelle (cf. proposition 8.2),

$$\mathrm{sh}(x) \;=\; y \iff e^x \,-\, e^{-x} \;=\; 2y \iff \big(e^x\big)^2 \,-\, 2y\cdot e^x \,-\, 1 \;=\; 0\,.$$

Comme l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par $z^2 - 2yz - 1 = 0$ admet pour solution $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ et $y + \sqrt{y^2+1} > 0$ et comme $e^x > 0$, on a donc

$$\mathrm{sh}(x) \;=\; y \iff e^x \;=\; y + \sqrt{y^2+1} \iff x \;=\; \ln\Big(y + \sqrt{y^2+1}\Big)\,,$$

d'après la bijectivité de l'exponentielle réelle. Comme l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par $\mathrm{sh}(x) = y$ est Argsh(y), on obtient (8.30).
Soit $y \in [1;+\infty[$. On a, pour $x \in \mathbb{R}^+$, d'après les propriétés de l'exponentielle réelle (cf. proposition 8.2),

$$\mathrm{ch}(x) \;=\; y \iff e^x \,+\, e^{-x} \;=\; 2y \iff \big(e^x\big)^2 \,-\, 2y\cdot e^x \,+\, 1 \;=\; 0\,.$$

L'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par $z^2 - 2yz + 1 = 0$ admet pour solution $y - \sqrt{y^2-1}$ et $y + \sqrt{y^2-1}$. Si $y = 1$, on a une solution double $y - \sqrt{y^2-1} = y + \sqrt{y^2-1} = y = 1$ et, si $y > 1$, on a $y - \sqrt{y^2-1} < 1$ et $y + \sqrt{y^2-1} > 1$. Comme, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $e^x \geq e^0 = 1$, on a donc

$$\mathrm{ch}(x) \;=\; y \iff e^x \;=\; y + \sqrt{y^2-1} \iff x \;=\; \ln\Big(y + \sqrt{y^2-1}\Big)\,,$$

d'après la bijectivité de l'exponentielle réelle. Comme l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ donnée par $\mathrm{ch}(x) = y$ est Argch(y), on obtient (8.31). □

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Argsh}(\mathrm{sh}(x)) = x = \mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}(x))$. On a aussi, pour tout $x \geq 1$, $\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}(x)) = x$. Attention : on a, certes, pour tout $x \geq 0$, $\mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) = x$ mais, pour $x < 0$, $\mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) \neq x$ car Argch est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Définition 8.28. *On appelle tangente hyperbolique la fonction th* : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par, pour* $x \in \mathbb{R}$, $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$. *On appelle cotangente hyperbolique la fonction* coth : $\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par, pour* $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{coth}(x) = \dfrac{ch(x)}{sh(x)}$.

Proposition 8.29. *La fonction th est impaire, strictement croissante et de classe C^1. On a*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad th'(x) \;=\; 1 \,-\, \big(th(x)\big)^2 \;=\; \frac{1}{\big(ch(x)\big)^2}\,.$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} th(x) \;=\; -1 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} th(x) \;=\; 1\,. \tag{8.32}$$

La fonction th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$. Sa bijection réciproque, appelée argument th et notée $\mathrm{Argth} :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$*, est impaire, strictement croissante et dérivable. De plus,*

$$\forall\, x \in]-1;1[\,, \quad \mathrm{Argth}'(x) \;=\; \frac{1}{1\,-\,x^2} \tag{8.33}$$

et

$$\lim_{x\to-1} \mathrm{Argth}\,(x) \;=\; -\infty \quad et \quad \lim_{x\to 1} \mathrm{Argth}\,(x) \;=\; +\infty\,. \tag{8.34}$$

La fonction coth *est impaire. Elle est de classe C^1 et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$. Elle est de classe C^1 et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. On a*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*\,, \quad \coth'(x) \;=\; 1 \,-\, \big(\coth(x)\big)^2 \;=\; \frac{-1}{\big(sh(x)\big)^2}\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \coth(x) \;=\; -1\,,\; \lim_{x\to 0^-} \coth(x) \;=\; -\infty\,,\; \lim_{x\to 0^+} \coth(x) \;=\; +\infty \;et\; \lim_{x\to+\infty} \coth(x) \;=\; 1\,. \tag{8.35}$$

La fonction coth *est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $]1;+\infty[$. Sa bijection réciproque, appelée argument* coth *et notée* $\mathrm{Argcoth} :]1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$*, est strictement décroissante et dérivable. De plus,*

$$\forall\, x \in]1;+\infty[\,, \quad \mathrm{Argcoth}'(x) \;=\; \frac{1}{1\,-\,x^2} \tag{8.36}$$

et

$$\lim_{x\to 1} \mathrm{Argcoth}\,(x) \;=\; +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Argcoth}\,(x) \;=\; 0\,. \tag{8.37}$$

Enfin, on a

$$\forall\, y \in]-1;1[\,, \quad \mathrm{Argth}\,(y) \;=\; \frac{1}{2}\cdot \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \tag{8.38}$$

et

$$\forall\, y \in]1;+\infty[\,, \quad \mathrm{Argcoth}\,(y) \;=\; \frac{1}{2}\cdot \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)\,. \tag{8.39}$$

Preuve : Par la proposition 8.26, sh est impaire et ch est paire, donc th et coth sont impaires. Comme sh et ch sont de classe C^1, il en est de même de th sur $\mathbb{R}$ et de coth sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$, par la proposition 6.18. De plus, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{th}'(x) \;&=\; \frac{\mathrm{ch}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)} \,-\, \mathrm{sh}\,(x)\cdot\frac{-1}{\big(\mathrm{ch}\,(x)\big)^2}\cdot \mathrm{sh}\,(x) \;=\; 1 \,-\, \big(\mathrm{th}\,(x)\big)^2 \\ &=\; \frac{\big(\mathrm{ch}\,(x)\big)^2 \,-\, \big(\mathrm{sh}\,(x)\big)^2}{\big(\mathrm{ch}\,(x)\big)^2} \;=\; \frac{1}{\big(\mathrm{ch}\,(x)\big)^2} \;>\; 0 \end{aligned}$$

et, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \coth'(x) \;&=\; \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{sh}\,(x)} \,-\, \mathrm{ch}\,(x)\cdot\frac{-1}{\big(\mathrm{sh}\,(x)\big)^2}\cdot \mathrm{ch}\,(x) \;=\; 1 \,-\, \big(\coth(x)\big)^2 \\ &=\; \frac{\big(\mathrm{sh}\,(x)\big)^2 \,-\, \big(\mathrm{ch}\,(x)\big)^2}{\big(\mathrm{sh}\,(x)\big)^2} \;=\; \frac{-1}{\big(\mathrm{ch}\,(x)\big)^2} \;<\; 0\,. \end{aligned}$$

Comme th est continue (cf. proposition 6.18) et strictement croissante (cf. corollaire 6.13), elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{th}(\mathbb{R})$ et sa bijection réciproque Argth est continue et strictement croissante sur $\mathrm{th}(\mathbb{R})$, par la proposition 7.5.
Comme $|\mathrm{sh}| < \mathrm{ch}$ partout (cf. proposition 8.26), on a $\mathrm{th}(\mathbb{R}) \subset]-1;1[$ donc th est bornée. Comme th est croissante, les limites $\ell_- = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x)$ et $\ell_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x)$ existent dans $\mathbb{R}$ et vérifient $\ell_- \leq \mathrm{th}(0) = 0 \leq \ell_+$ (cf. proposition 4.36). Par (8.25) et la proposition 4.35, on peut passer à la limite $x \to -\infty$ et à la limite $x \to +\infty$ dans l'égalité suivante, vue plus haut et valable pour $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - \big(\mathrm{th}(x)\big)^2 = \frac{1}{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2}\,.$$

On obtient $1 - \ell_-^2 = 0$ et $1 - \ell_+^2 = 0$. Comme $\ell_- \leq 0$ et $\ell_+ \geq 0$, on a $\ell_- = -1$ et $\ell_+ = 1$. Par la proposition 7.6, on en déduit que $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1;1[$.
Pour $x \in]-1;1[$, on a $-x \in]-1;1[$ et, d'après l'imparité de th, $\mathrm{th}(-\mathrm{Argth}(x)) = -\mathrm{th}(\mathrm{Argth}(x)) = -x$. Donc $-\mathrm{Argth}(x)$ est solution de l'équation d'inconnue $t \in \mathbb{R}$ donnée par $\mathrm{th}(t) = -x$, dont l'unique solution est $\mathrm{Argth}(-x)$ d'après la bijectivité de th de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$. Donc $\mathrm{Argth}(-x) = -\mathrm{Argth}(x)$. On a montré que Argth est impaire.
Comme la dérivée de th ne s'annule pas, Argth est dérivable, par la proposition 7.7. De plus, pour $x \in \mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1;1[$,

$$\mathrm{Argth}'(x) = \frac{1}{\mathrm{th}'\big(\mathrm{Argth}(x)\big)} = \frac{1}{1 - \big(\mathrm{th}\big(\mathrm{Argth}(x)\big)\big)^2} = \frac{1}{1 - x^2}\,.$$

Comme coth est continue (cf. proposition 6.18) et strictement décroissante (cf. corollaire 6.13) sur $\mathbb{R}^{+*}$, elle est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathrm{coth}(\mathbb{R}^{+*})$ et sa bijection réciproque Argcoth est continue et strictement décroissante sur $\mathrm{coth}(\mathbb{R}^{+*})$, par la proposition 7.5.
Comme coth est décroissante et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, les limites $\ell_0 = \lim\limits_{x\to0^+} \coth(x)$ et $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \coth(x)$ existent et vérifient $\ell_0 \geq \coth(1) \geq \ell \geq 0$ (cf. propositions 4.36 et 4.37). Par (8.25) et la proposition 4.35, on peut passer à la limite $x \to 0^+$ et à la limite $x \to +\infty$ dans l'égalité, vue plus haut et valable pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$1 - \big(\coth(x)\big)^2 = \frac{1}{\big(\mathrm{sh}(x)\big)^2}\,.$$

Si ℓ_0 était réel, on aurait $1 - \ell_0^2 = +\infty$. Contradiction. Donc $\ell_0 = +\infty$. Comme $\ell \in \mathbb{R}$, on obtient $1 - \ell^2 = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 1$. Par la proposition 7.6, on en déduit que $\coth(\mathbb{R}^{+*}) =]-1;+\infty[$.
Comme coth est impaire, comme $\lim\limits_{t\to0}(-t) = 0$, comme $\lim\limits_{t\to-\infty}(-t) = +\infty$, on a, par composition et produit (cf. propositions 4.27, 4.31 et 4.35),

$$\lim_{x\to0^-} \coth(x) = -\ell_0 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \coth(x) = -\ell = -1\,.$$

Comme la dérivée de coth ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$, Argcoth est dérivable sur $\coth(\mathbb{R}^{+*}) =]-1;+\infty[$, par la proposition 7.7. De plus, pour $x \in]-1;+\infty[$,

$$\mathrm{Argcoth}'(x) = \frac{1}{\coth'\big(\mathrm{Argcoth}(x)\big)} = \frac{1}{1 - \big(\coth\big(\mathrm{Argcoth}(x)\big)\big)^2} = \frac{1}{1 - x^2}\,.$$

Comme Argcoth est décroissante, on a, par les propositions 4.36 et 4.37,

$$\lim_{x\to1} \mathrm{Argcoth}(x) = \sup \mathbb{R}^{+*} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Argcoth}(x) = \inf \mathbb{R}^{+*} = 0\,.$$

Soit $y \in]-1;1[$. On note que $1 - y > 0$ et $1 + y > 0$. D'après les propriétés de l'exponentielle réelle (cf. propositions 8.2 et 8.8), on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{th}(x) = y &\iff e^x - e^{-x} = y \cdot \big(e^x + e^{-x}\big) \iff e^{2x} - 1 = y \cdot \big(e^{2x} + 1\big) \\ &\iff e^{2x} \cdot (1-y) = 1 + y \iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \iff x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\,. \end{aligned}$$

Comme l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ donnée par $\mathrm{th}(x) = y$ est $\mathrm{Argth}(y)$ (cf. proposition 7.2), on obtient (8.38).
Soit $y \in]1; +\infty[$. On note que $y+1>0$ et $y-1>0$. D'après les propriétés de l'exponentielle réelle (cf. propositions 8.2 et 8.8), on a, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\coth(x) \;=\; y \iff e^x + e^{-x} \;=\; y \cdot \left(e^x - e^{-x}\right) \iff e^{2x} + 1 \;=\; y \cdot \left(e^{2x} - 1\right)$$
$$\iff e^{2x} \cdot (1-y) \;=\; -1-y \iff e^{2x} \;=\; \frac{y+1}{y-1} \iff x \;=\; \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right).$$

Comme l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ donnée par $\coth(x) = y$ est $\mathrm{Argcoth}(y)$ (cf. proposition 7.2), on obtient (8.39). □

On détermine maintenant la régularité des fonctions hyperboliques.

Proposition 8.30. *On a les régularités C^∞ suivantes :*

1. *Les fonctions sh et ch sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*
2. *La fonction th est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction* coth *est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$.*
3. *La fonction* Argsh *est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et la fonction* Argch *est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$.*
4. *La fonction* Argth *est de classe C^∞ sur $]-1; 1[$ et la fonction* Argcoth *est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$.*

Preuve :

1. La fonction polynôme $\mathbb{R} \ni x \mapsto -x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (cf. proposition 6.30). Comme la fonction exponentielle réelle exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, il en est de même de l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \exp(-t)$, par composition (cf. proposition 6.29). D'après cette proposition 6.29, il en est de même de $\mathrm{sh} = (\exp - g)/2$ et $\mathrm{ch} = (\exp + g)/2$.
2. Soit $J = \mathbb{R}^{+*}$ ou $J = \mathbb{R}^{-*}$. Comme $\mathrm{th} = \mathrm{sh}/\mathrm{ch}$ sur $\mathbb{R}$ et $\coth = \mathrm{ch}/\mathrm{sh}$ sur J, on déduit du 2 et de la proposition 6.29 que th est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et coth est de classe C^∞ sur J.
3. Par le 1, on peut appliquer le corollaire 7.9 à sh et ch. Cela montre que Argsh est de classe C^∞ sur tout intervalle I non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\mathrm{sh})$ et que Argch est de classe C^∞ sur tout intervalle J non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\mathrm{ch})$. Comme $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ ne s'annule pas, $\mathcal{P}(\mathrm{sh}) = \mathbb{R}$ et Argsh est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathrm{ch}) &= \left\{y \in \mathrm{ch}\left([0; +\infty[\right)\,; \quad \mathrm{ch}'\left(\mathrm{Argch}(y)\right) \neq 0\right\} \\ &= \left\{y \in \mathrm{ch}\left([0; +\infty[\right)\,; \quad \mathrm{sh}\left(\mathrm{Argch}(y)\right) \neq 0\right\} \\ &= \left\{y \in [1; +\infty[; \quad \mathrm{Argch}(y) \neq 0\right\} =]1; +\infty[\,.\end{aligned}$$

   Donc Argch est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$.
4. Par le 2, on peut appliquer le corollaire 7.9 à th et coth. Cela montre que Argth est de classe C^∞ sur tout intervalle I non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\mathrm{th})$ et que Argcoth est de classe C^∞ sur tout intervalle J non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\coth)$. Comme th' ne s'annule pas, $\mathcal{P}(\mathrm{th}) =]-1; 1[$ et Argth est de classe C^∞ sur $]-1; 1[$. Comme $\coth'$ ne s'annule pas, $\mathcal{P}(\coth) =]1; +\infty[$ et Argcoth est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$. □

9 Compléments.

Dans cette partie, on construit la fonction partie entière, on montre la formule du binôme de Newton, on revient en détail sur une subtilité rencontrée lors de l'étude des suites récurrentes et on donne une construction de la fonction exponentielle complexe.

9.1 Fonction partie entière.

On construit ici la fonction partie entière.

On commence par un résultat sur les ensembles finis (cf. définition 1.11).

Proposition 9.1. *Soit E et F deux ensembles non vides. Pour un ensemble fini A, on note par* $\mathrm{card}A$ *son cardinal* (*cf. définition 1.11*).

1. *S'il existe une bijection $b : E \longrightarrow F$ et si l'un des ensembles E et F est fini alors l'autre est aussi fini et* $\mathrm{card}E = \mathrm{card}F$.
2. *Si les ensembles E et F sont finis et* $\mathrm{card}E = \mathrm{card}F$ *alors il existe une bijection $b : E \longrightarrow F$.*
3. *Si $E \subset F$ et F est fini alors E est fini et* $\mathrm{card}E \leq \mathrm{card}F$.

Preuve :

a). On suppose que E est fini de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ et qu'il existe une bijection $b : E \longrightarrow F$. On a donc des éléments $a_1; \cdots ; a_p$ deux à deux distincts de E tel que $E = \{a_j; j \in [\![1; p]\!]\}$. Pour $j \in [\![1; p]\!]$, soit $b_j = b(a_j) \in F$. On a $\{b_j; j \in [\![1; p]\!]\} \subset F$.
Si $(j; k) \in [\![1; p]\!]^2$ avec $b_j = b_k$ alors $b(a_j) = b(a_k)$ et, comme b est injective, $a_j = a_k$. Nécessairement $k = j$. Les éléments $b_1; \cdots ; b_p$ de F sont donc deux à deux distincts.
Soit $f \in F$. Comme b est surjective, il existe $e \in E$ tel que $b(e) = f$. Il existe $j \in [\![1; p]\!]$ tel que $e = a_j$. Donc $f = b(e) = b(a_j) = b_j$. Donc $f \in \{b_j; j \in [\![1; p]\!]\}$. Ceci étant vrai pour tout $f \in F$, on a montré que $F \subset \{b_j; j \in [\![1; p]\!]\}$.
Conclusion : $F = \{b_j; j \in [\![1; p]\!]\}$, F est finie et $\mathrm{card}F = p = \mathrm{card}E$.

b). On suppose que F est fini de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ et qu'il existe une bijection $b : E \longrightarrow F$. On note par $b^{\langle -1\rangle} : F \longrightarrow E$ la bijection réciproque de b. On applique le a) avec E remplacé par F, F remplacé par E et b remplacé par $b^{\langle -1\rangle}$. On obtient que E est fini et $\mathrm{card}E = \mathrm{card}F$.

c). On suppose que E et F sont finis de même cardinal $p \in \mathbb{N}^*$. Il existe donc des éléments $a_1; \cdots ; a_p$ deux à deux distincts de E tel que $E = \{a_j; j \in [\![1; p]\!]\}$. Il existe donc des éléments $b_1; \cdots ; b_p$ deux à deux distincts de F tel que $F = \{b_j; j \in [\![1; p]\!]\}$. Soit $b : E \longrightarrow F$ l'application définie par, pour $j \in [\![1; p]\!]$, $b(a_j) = b_j$.
On a $b(E) = F$ donc b est sujective (cf. proposition 7.2).
Soit $(e, e') \in E^2$ tel que $b(e) = b(e')$. Il existe $(j; k) \in [\![1; p]\!]^2$ tel que $e = a_j$ et $e' = a_k$. On a $b_j = b(a_j) = b(e) = b(e') = b_k$. Nécessairement $j = k$ donc $e = a_j = a_k = e'$. On a montré que b est injective.
On a montré que b est bijective.

d). Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(p)$ la proposition : Pour tout ensemble fini F de cardinal p, ses parties sont finies de cardinal inférieur ou égal à p.
Soit F est un singleton. Le vide est une partie finie de F de cardinal $0 \leq 1$ et F est une partie finie de F de cardinal $1 \leq 1$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Soit F un ensemble fini de cardinal $p + 1$. Il existe donc des éléments $a_1; \cdots ; a_{p+1}$ deux à deux distincts de F tel que $F = \{a_j; j \in [\![1; p + 1]\!]\}$. Soit E une partie de F.
Si $E = F$ alors E est fini de cardinal $p + 1 \leq p + 1$.
Sinon, il existe $f \in F \setminus E$. Il existe $k \in [\![1; p+1]\!]$ tel que $f = a_k$. On a donc $F\setminus\{f\} = \{b_j; j \in [\![1; p]\!]\}$ avec $b_j = a_j$ si $j < k$ et $b_j = a_{j+1}$ si $k < j$. Donc $F\setminus\{f\}$ est fini de cardinal p. De plus, $E \subset (F\setminus\{f\})$.
Par l'hypothèse de récurrence, E est fini et $\mathrm{card}E \leq p \leq p + 1$. Donc $\mathcal{P}(p + 1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. □

On compte le nombre d'entier relatif dans un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur 1.

Proposition 9.2. *Soit $a \in \mathbb{R}$.*

1. *L'ensemble $]a; a + 1] \cap \mathbb{Z}$ est fini et* $\mathrm{card}(]a; a + 1] \cap \mathbb{Z}) = 1$.
2. *L'ensemble $[a; a + 1[\cap \mathbb{Z}$ est fini et* $\mathrm{card}([a; a + 1[\cap \mathbb{Z}) = 1$.

3. *L'ensemble* $[a; a+1] \cap \mathbb{Z}$ *est fini et* $\mathrm{card}([a; a+1] \cap \mathbb{Z}) \in [\![1; 2]\!]$.
4. *On a les équivalences*

$$\big(\mathrm{card}([a; a+1] \cap \mathbb{Z}) \ = \ 2\big) \iff \big(a \in \mathbb{Z}\big) \iff \big(]a; a+1[\cap \mathbb{Z} \ = \ \emptyset\big)\ .$$

Preuve :

1. Si $a \in \mathbb{Z}$, $a+1 \in \mathbb{Z}$ donc $]a; a+1] \cap \mathbb{Z}$ contient $a+1$. Prenons $a \notin \mathbb{Z}$. L'ensemble $A : \{n \in \mathbb{N}; n \geq |a|+1\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ d'après la propriété d'Archimède (cf. (1.4)). Il admet donc un minimum $n_0 > 0$ (cf. proposition 1.13). Comme $(|a|+1) \notin \mathbb{Z}$, $n_0 > |a|+1$. Par définition de n_0, $n_0 - 1 \notin A$ donc $n_0 - 1 < |a|+1 < n_0$. On a donc $(n_0 - 1) \in]|a|; |a|+1[$. Si $a \geq 0$, $]a; a+1] \cap \mathbb{Z}$ contient $n_0 - 1$. Si $a < 0$ alors, comme $-|a| - 1 < -(n_0 - 1) < -|a|$ et $a = -|a|$, on a $a < -n_0 + 2 < a+1$ donc $]a; a+1] \cap \mathbb{Z}$ contient $-n_0 + 2$.
   Dans tous les cas, $]a; a+1] \cap \mathbb{Z}$ a au moins un élément.
   Supposons qu'on ait $(k; k') \in (]a; a+1] \cap \mathbb{Z})^2$ tel que $k \leq k'$. On a $a < k \leq k' \leq a+1$ et $-a > -k$ donc $0 \leq k' - k < 1$. Comme $(k' - k) \in \mathbb{Z}$, on a $k' - k = 0$ soit $k = k'$.
   On a montré que $]a; a+1] \cap \mathbb{Z}$ a exactement un élément.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x$. Pour $y \in \mathbb{R}$, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = y$ a une solution unique, à savoir $x = -y$. Donc f est bijective d'après (7.3) et sa bijection réciproque est $f^{\langle -1 \rangle} = f$.
   On a $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ donc $(f \circ f)(\mathbb{Z}) \subset f(\mathbb{Z})$ soit $\mathbb{Z} \subset f(\mathbb{Z})$. Donc $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
   Comme f est strictement décroissante, on a $f([a; a+1[) \subset]-(a+1); -a]$ donc $(f \circ f)([a; a+1[) \subset f(]-(a+1); -a]) \subset [a; a+1[$. On a donc $f(]-(a+1); -a]) = [a; a+1[$.
   Par 1, il existe $p \in]-(a+1); -a] \cap \mathbb{Z}$. Comme $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $f(]-(a+1); -a]) = [a; a+1[$, $f(p) \in [a; a+1[\cap \mathbb{Z}$. Donc $[a; a+1[\cap \mathbb{Z}$ est non vide. Si $(q_1; q_2) \in ([a; a+1[\cap \mathbb{Z})^2$ alors $f(q_1) \in]-(a+1); -a] \cap \mathbb{Z}$ et $f(q_2) \in]-(a+1); -a] \cap \mathbb{Z}$. Comme cet ensemble a un seul élément, par 1, $f(q_1) = f(q_2)$. Comme f est injective, $q_1 = q_2$. Donc $[a; a+1[\cap \mathbb{Z}$ est un singleton.
3. Si $a \notin \mathbb{Z}$, $[a; a+1] \cap \mathbb{Z} =]a; a+1] \cap \mathbb{Z}$ qui est fini de cardinal 1, par 1. Si $a \in \mathbb{Z}$, $[a; a+1] \cap \mathbb{Z} = \{a; b\}$, où b est l'unique élément de $]a; a+1] \cap \mathbb{Z}$. Comme $b \neq a$, $\{a; b\}$ est fini de cardinal 2.
4. Dans la preuve de 3, on a montré : $(a \in \mathbb{Z} \implies \mathrm{card}([a; a+1] \cap \mathbb{Z}) = 2)$. Montrons la réciproque.
   On suppose que $[a; a+1] \cap \mathbb{Z}$ a deux éléments. Comme $]a; a+1] \cap \mathbb{Z}$ est un singleton, par 1, on a nécessairement $]a; a+1] \cap \mathbb{Z} \neq [a; a+1] \cap \mathbb{Z}$ donc $a \in [a; a+1] \cap \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$.
   L'ensemble $]a; a+1[\cap \mathbb{Z}$ est une partie de l'ensemble fini $]a; a+1] \cap \mathbb{Z}$ de cardinal 1. Donc $]a; a+1[\cap \mathbb{Z}$ est fini et $\mathrm{card}([a; a+1] \cap \mathbb{Z}) \leq 1$, par la proposition 9.1.
   Si $]a; a+1[\cap \mathbb{Z}$ est vide alors, comme $\mathrm{card}(]a; a+1] \cap \mathbb{Z}) = 1$, $a+1$ appartient forcément à $\mathbb{Z}$, donc $a \in \mathbb{Z}$.
   Si $a \in \mathbb{Z}$ alors, d'après 3, $\mathrm{card}([a; a+1] \cap \mathbb{Z}) = 2$. Comme $a \in [a; a+1] \cap \mathbb{Z}$ et $a+1 \in [a; a+1] \cap \mathbb{Z}$, l'ensemble $]a; a+1[\cap \mathbb{Z} = ([a; a+1] \cap \mathbb{Z}) \setminus \{a; a+1\}$ est vide. □

On est en mesure de construire la fonction partie entière.

Proposition 9.3. *Il existe une unique application* $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *vérifiant*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad E(x) \ \leq \ x \ < \ E(x) \ + \ 1\ . \tag{9.1}$$

Cette fonction E *est appelée fonction partie entière. Pour* $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ *est la partie entière de* x.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la proposition 9.2, l'intervalle $]x-1; x]$ contient exactement un entier relatif. On l'appelle $E(x) \in \mathbb{Z}$. On a donc $x - 1 < E(x) \leq x$. Donc $x < E(x) + 1$ et on a (9.1).
Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une application vérifiant (9.1) avec E remplacée par g. Pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq x$ et $g(x) > x - 1$ donc $g(x) \in (]x-1; x] \cap \mathbb{Z})$. Par la proposition 9.2, on a nécessairement $g(x) = E(x)$. Donc $g = E$, ce qui montre l'unicité de E. □

9.2 Formule du binôme de Newton.

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du résultat, qui porte le nom de formule du binôme de Newton, et d'une identité remarquable.

Proposition 9.4. *Soit* $(a;b) \in \mathbb{C}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n} C_\ell^n \cdot a^{n-\ell} \cdot b^\ell , \tag{9.2}$$

où, pour $0 \leq k \leq n$, *les* C_k^n *sont les coefficients du binôme de Newton définis par*

$$C_k^n = \frac{n!}{(k!) \cdot ((n-k)!)} \quad \textit{et aussi notés par} \quad \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} .$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot b^{n-k} . \tag{9.3}$$

On constate une grande similarité entre (9.2) et la formule (6.13). En fait, on va montrer (9.2) en suivant quasiment les arguments de la preuve de (6.13).

Preuve de la proposition 9.4 : Tout d'abord, on remarque que, pour $(k;n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$, on a les propriétés $C_k^n = C_{n-k}^n$, $C_n^n = C_0^n = 1$ et, pour $k \geq 1$, $C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathcal{P}(n) =$ ((9.2) est vraie).
Comme $(a+b)^0 = 1 = a^0 = b^0$ et $C_0^0 = 1$, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc, d'après l'hypothèse de récurrence et la proposition 3.9, d'après les remarques précédentes,

$$\begin{aligned}
\big(a + b\big)^{n+1} &= (a + b) \cdot \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot \big(a^{k+1} \cdot b^{n-k} + a^k \cdot b^{n-k+1}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot a^{k+1} \cdot b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} C_{\ell-1}^n \cdot a^\ell \cdot b^{n+1-\ell} + \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} \\
&= C_n^n \cdot a^{n+1} \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{n} \big(C_{k-1}^n + C_k^n\big) \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} + C_0^n \cdot a^0 \cdot b^{n+1} \\
&= C_{n+1}^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{n} C_k^{n+1} \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} + C_0^{n+1} \cdot a^0 \cdot b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} = \sum_{\ell=0}^{n+1} C_{n+1-\ell}^{n+1} \cdot a^{n+1-\ell} \cdot b^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{n+1} C_\ell^{n+1} \cdot a^{n+1-\ell} \cdot b^\ell .
\end{aligned}$$

On a montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, d'après la proposition 3.9,

$$(a-b)\cdot\sum_{k=0}^{n} a^k\cdot b^{n-k} = a\cdot\sum_{k=0}^{n} a^k\cdot b^{n-k} - b\cdot\sum_{k=0}^{n} a^k\cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^{k+1}\cdot b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a^k\cdot b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n+1} a^\ell\cdot b^{n-\ell+1} - \sum_{k=0}^{n} a^k\cdot b^{n+1-k}$$

$$= a^{n+1}\cdot b^0 + \sum_{\ell=1}^{n} a^\ell\cdot b^{n-\ell+1} - a^0\cdot b^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a^k\cdot b^{n+1-k} = a^{n+1} - b^{n+1},$$

ce qui démontre (9.3). □

On remarque que, lorsque $b=1$ et $a \neq 1$, (9.3) redonne (3.17) avec n remplacé par $n+1$.

9.3 Une difficulté liée aux relations de récurrence.

On se penche sur la preuve de la proposition 3.2. On peut trouver la preuve donnée assez compliquée et se demander si l'on ne peut pas faire plus simple. En particulier, on peut essayer la chose suivante.
Soit $d \in \mathcal{D}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:

$$\exists(a_0;\cdots;a_n)\in\mathcal{D}^n\,;\quad \Big((a_0 = d) \text{ et } \big(n > 0 \implies \forall j \in [\![1;n-1]\!]\,,\, a_{j+1} = f(a_j)\big)\Big)\,. \tag{9.4}$$

En prenant $a_0 = d$, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, puisque l'implication est vraie lorsque $(n > 0)$ est fausse. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc un $(a_0;\cdots;a_n) \in \mathcal{D}^n$ tel que la proposition entre grandes paranthèses dans (9.4) soit vraie. En particulier, $a_n \in \mathcal{D}$ donc $f(a_n)$ est bien défini. On pose $a_{n+1} = f(a_n)$. On vérifie maintenant pour, pour ce $(a_0;\cdots;a_n;a_{n+1})$, la proposition entre grandes paranthèses dans (9.4) avec n remplacé par $n+1$ est vraie. On a déjà $a_0 = d$ par hypothèse de récurrence. Soit $j \in [\![1;(n+1)-1]\!]$. Si $j < n$, on a, par hypothèse de récurrence, $a_{j+1} = f(a_j)$. De plus, par construction, on a aussi $a_{n+1} = f(a_n)$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On définit une suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ de la façon suivante : Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, on a un $(a_0;\cdots;a_n;a_{n+1}) \in \mathcal{D}^n$ pour lequel la proposition entre grandes paranthèses dans (9.4) avec n remplacé par $n+1$ est vraie. On pose $u_n = a_n \in \mathcal{D}$.
Pour vérifier la relation de récurrence (3.1), on se trouve confronté au problème suivant. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut vérifier que $u_{n+1} = f(u_n)$ mais u_{n+1} est défini par $\mathcal{P}(n+2)$ tandis que u_n est défini par $\mathcal{P}(n+1)$. La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ donne un $(a_0;\cdots;a_n;a_{n+1})$ tel que la proposition entre grandes paranthèses dans (9.4) soit vraie avec n remplacé par $n+1$. La proposition $\mathcal{P}(n+2)$ donne un $(a'_0;\cdots;a'_n;a'_{n+1};a'_{n+2})$ tel que la proposition entre grandes paranthèses dans (9.4) soit vraie avec n remplacé par $n+2$ et $(a_0;\cdots;a_n;a_{n+1};a_{n+2})$ remplacé par $(a'_0;\cdots;a'_n;a'_{n+1};a'_{n+2})$. Par construction de u, on a $u_n = a_n$ et $a_{n+1} = f(u_n)$, d'une part, et $u_{n+1} = a'_{n+1}$, d'autre part. Comment être sûr que l'on a $a'_{n+1} = a_{n+1}$?
Ce problème se pose aussi, si l'on choisit de définir u_n comme égal au a_n donné par $\mathcal{P}(n)$.

On rencontre une difficulté similaire dans les preuves de la proposition 3.6, de la proposition 3.28, du théorème 3.53, de la proposition 6.21 et de la proposition 6.25. Dans chaque cas, le problème se pose pour la construction de suites vérifiant des propriétés de récurrence.

Essayons de prouver la proposition 3.6 en utilisant, pour $n \in [\![n_0;+\infty[\![$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ donnée par :

$$\exists(a_{n_0};\cdots;a_n)\in\mathbb{K}^{n-n_0+1}\,;\quad \Big((a_{n_0} = u_{n_0}) \text{ et } \big(n > n_0 \implies \forall j \in [\![n_0;n-1]\!], a_{j+1} = a_j + u_{j+1}\big)\Big)\,. \tag{9.5}$$

On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire. On doit maintenant construire une suite $s = (s_n)_{n\in[\![n_0;+\infty[\![}$ vérifiant la relation de récurrence (3.4). Pour $n \geq n_0$, on définit s_n par le a_n donné par $\mathcal{P}(n+1)$. Prenons un $(a'_0;\cdots;a'_n;a'_{n+1};a'_{n+2})$ tel que la proposition entre grandes paranthèses dans (9.5) soit vraie avec n remplacé par $n+2$ et $(a_0;\cdots;a_n;a_{n+1};a_{n+2})$ remplacé par $(a'_0;\cdots;a'_n;a'_{n+1};a'_{n+2})$. On a donc $s_{n+1} = a'_{n+1}$. Par $\mathcal{P}(n+2)$, on sait que $s_{n+1} = a'_n + u_{n+1}$ et, par $\mathcal{P}(n+1)$, on sait que $a_{n+1} = s_n + u_{n+1}$. Donc $s_{n+1} = a'_n - a_n + s_n + u_{n+1}$. Qu'est-ce qui garantit que l'on a $a'_n = a_n$? On retombe donc bien sur un problème similaire au précédent.

On voit que le problème vient du fait que, dans l'hypothèse de récurrence, on a l'existence d'un certain objet mais on a oublié le lien de cet objet avec l'objet aux rangs précédents. Dans le cas de la preuve de la proposition 3.6, on ne sait donc pas si $a'_n = a_n$.
Il faudrait remplacer l'hypothèse de récurrence par quelque chose comme "supposons construits $a_0, \cdots, a_n$ tel que ....". Mais on veut quand même faire un raisonnement par récurrence donc utiliser le théorème 1.7. On a donc besoin de traduire "supposons construits $a_0, \cdots, a_n$ tel que ...." dans le langage de ce théorème. C'est ce que l'on fait dans les preuves "compliquées" de la proposition 3.2, de la proposition 3.6, de la proposition 3.28, du théorème 3.53, du théorème 5.1, de la proposition 6.21 et de la proposition 6.25.

9.4 Construction de l'exponentielle complexe.

On donne ici une construction de la fonction exponentielle basée sur la notion de suite de Cauchy. On montre ensuite certaines propriétés de la fonction obtenue. On termine par la donnée d'une formule pour l'argument principal d'un nombre complexe non nul.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on considère la suite $s = (s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$s_N \;:=\; \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\,. \tag{9.6}$$

On va montrer que s est convergente dans $\mathbb{C}$. Pour ce faire, il suffit de montrer que s est une suite de Cauchy (cf. théorème 3.59). On rappelle que, pour $z \in \mathbb{C}$, la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie dans la définition 3.13.

Lemme 9.5. *Pour $z \in \mathbb{C}$, on considère la suite complexe $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n \;:=\; \frac{z^n}{n!}\,.$$

La suite réelle $|u|$ est décroissante à partir du rang $E(|z|)+1$ et converge vers 0.

Preuve : Soit $p = E(|z|) + 1 \in \mathbb{Z}$, où $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ désigne la fonction partie entière (cf. proposition 9.3). On a $p > |z|$ et, comme $|z| \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \in [\![p;+\infty[\![$, on a

$$|u_{n+1}| \;=\; \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \;=\; \frac{|z|^n}{n!}\cdot\frac{|z|}{(n+1)} \;=\; |u_n|\cdot\frac{|z|}{(n+1)} \;\leq\; |u_n|$$

car $n+1 \geq p \geq |z|$. On a montré que $|u|$ est décroissante à partir du rang p.
Comme la suite $|u|$ est positive, elle est minorée par 0. Par les propositions 3.46 et 3.33, elle converge vers un réel ℓ. Comme $(|u_{n+1}|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $|u|$, elle converge aussi vers ℓ (cf. proposition 3.51). Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}| \;=\; |u_n|\cdot\frac{|z|}{(n+1)}$$

et comme $\lim_n 1/(n+1) = 0$, on a, par les opérations sur les limites (cf. proposition 3.41), $\ell = \ell \cdot 0 = 0$. $\square$

On va utiliser la suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$. On a vu au paragraphe 3.3.3 que la suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une extractrice donc elle diverge vers $+\infty$, par la proposition 3.50. Par inversion (cf. proposition 3.44), on en déduit que la suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 9.6. *Soit $z \in \mathbb{C}$. La suite s définie par* (9.6) *est de Cauchy.*
Par le théorème 3.59, elle converge donc dans $\mathbb{C}$.

Preuve : Comme la suite $|u|$ est convergente, d'après le lemme 9.5, elle est bornée, d'après la proposition 3.43. Soit $C_z > 0$ un majorant de $|u|$. Si l'on remplace z par $2z$ dans la définition de u, la nouvelle suite $|u|$ est majorée par $C_{2z} > 0$.
Pour $N \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a, par la proposition 3.9,

$$s_{N+p} - s_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{z^n}{n!}$$

donc

$$\left|s_{N+p} - s_N\right| \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(2|z|)^n}{n!} \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{2^n} \cdot C_{2z} = C_{2z} \cdot \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{2^n} .$$

Par la proposition 3.9, on a

$$\sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{N+1}} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{N+1}} \cdot \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{N+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^N} ,$$

en utilisant (3.17) avec $a = (1/2) \neq 1$. Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|s_{N+p} - s_N\right| \leq \frac{C_{2z}}{2^N} . \tag{9.7}$$

On remarque que (9.7) est encore vraie pour $p = 0$ et $N \in \mathbb{N}$.
On montre maintenant que s est de Cauchy en utilisant la proposition 3.57. Soit $\epsilon > 0$. Comme la suite $(2^{-N})_{N \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $N \geq N_0$,

$$0 \leq \frac{1}{2^N} < \frac{\epsilon}{C_{2z}} .$$

Pour $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq N_0$ et $p \in \mathbb{N}$, on a donc, par (9.7), $|s_{N+p} - s_N| < \epsilon$. On a montré que s est une suite de Cauchy. □

On est maintenant en mesure de définir l'exponentielle complexe.

Définition 9.7. *L'application* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par, pour $z \in \mathbb{C}$,*

$$\exp(z) := \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}$$

est appelée fonction exponentielle complexe. Pour $z \in \mathbb{C}$, on note aussi $e^z := \exp(z)$.

Avec une telle définition, il est difficile de déterminer explicitement l'exponentielle d'un nombre complexe, même de 1 ou de 2. Il y a, cependant, un cas particulier simple, celui de 0. En effet, si $z = 0$, la suite s est constante égale à 1. Elle converge donc vers 1. Donc $\exp(0) = 1$.
On va maintenant donner des propriétés de l'exponentielle. On a besoin d'une précision. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a définit la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence (cf. définition 3.13). On peut vérifier par récurrence que, si $z \neq 0$, cette suite ne s'annule pas. Pour $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $z^{-n} = 1/z^n$.

Proposition 9.8. *Soit* $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. *On a les propriétés suivantes :*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \overline{\exp(z)} \;=\; \exp\big(\overline{z}\big)\,, \tag{9.8}$$

$$\forall\, (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2\,, \quad \exp(z_1 + z_2) \;=\; \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)\,, \tag{9.9}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \exp(z) \;\neq\; 0 \quad \textit{et} \quad \frac{1}{\exp(z)} \;=\; \exp(-z)\,, \tag{9.10}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \forall\, p \in \mathbb{Z}\,, \quad \exp(p \cdot z) \;=\; \big(\exp(z)\big)^p\,, \tag{9.11}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exp(x) \;\in \mathbb{R}^{+*}\,, \tag{9.12}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exp(ix) \;\in \mathcal{U}\,. \tag{9.13}$$

Preuve : Soit $z \in \mathbb{C}$. En utilisant (3.13) puis le fait que le module d'un nombre complexe est égale au module de son conjugué, on a, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left|\overline{\exp(z)} \;-\; \sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!}\right| \;=\; \left|\overline{\exp(z) \;-\; \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}}\right| \;=\; \left|\exp(z) \;-\; \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right|\,.$$

Par définition de $\exp(z)$, le membre de droite tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ (cf. proposition 3.40) donc la membre de gauche tend aussi vers 0 ce qui donne (toujours par la proposition 3.40),

$$\overline{\exp(z)} \;=\; \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!} \;=\; \exp\big(\overline{z}\big)\,.$$

On a montré (9.8).
On remarque que, si $x \in \mathbb{R}^+$, la suite s avec z remplacé par x est une suite réelle croissante de premier terme 1 donc, par la proposition 3.46,

$$\mathbb{R} \ni \exp(x) \;=\; \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \;=\; \sup\left\{\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\;;\; N \in \mathbb{N}\right\} \;\geq\; 1\,. \tag{9.14}$$

Soit $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$. On considère la suite $d = (d_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$d_N \;=\; \sum_{n=0}^{2N} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} \;-\; \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z_1^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z_2^n}{n!}\right)\,.$$

La suite

$$\left(\sum_{n=0}^{2N} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}\right)_{N\in\mathbb{N}} \quad \text{est une sous-suite de la suite} \quad \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

et cette dernière converge vers $\exp(z_1 + z_2)$. Par la proposition 3.51, la première suite converge aussi vers $\exp(z_1 + z_2)$. Par les opérations sur les limites (cf. proposition 3.41), d converge vers

$$\exp(z_1 + z_2) \;-\; \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)\,.$$

Pour montrer (9.9), il suffit de montrer que d converge aussi vers 0.
On pose, pour $(p; q) \in [\![0; 2N]\!]^2$,

$$A_{p;q} \;:=\; \frac{z_1^p \cdot z_2^q}{(p!) \cdot (q!)}\,.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a, d'après la proposition 3.9,

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z_1^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z_2^n}{n!}\right) \;=\; \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} \frac{z_1^p \cdot z_2^q}{(p!) \cdot (q!)} \;=\; \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} A_{p;q}\,.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a, par la formule du binôme (cf. (9.2)) et la proposition 3.9,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{2N} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot z_1^k \cdot z_2^{n-k} \;=\; \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k \cdot z_2^{n-k}}{(k!) \cdot \big((n-k)!\big)} \;=\; \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} A_{k;n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} A_{k;n-k} \;+\; \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\sum_{k=0}^{n-N-1} A_{k;n-k} + \sum_{k=n-N}^{N} A_{k;n-k} + \sum_{k=N+1}^{n} A_{k;n-k} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} A_{k;n-k} \;+\; \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{k=n-N}^{N} A_{k;n-k} \\
&\qquad + \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\sum_{k=0}^{n-N-1} A_{k;n-k} + \sum_{k=N+1}^{n} A_{k;n-k} \right) .
\end{aligned}$$

Pour $(p;q) \in [\![0;N]\!]^2$, le terme $A_{p;q}$ est égal à $A_{k;n-k}$, pour $k=p$ et $q=n-k$, donc pour $0 \le k \le n \le N$ si $p+q \le N$ et pour $N+1 \le n \le 2N$ et $n-N \le k \le N$ si $p+q > N$.
Réciproquement, le terme $A_{k;n-k}$, pour $0 \le k \le n \le N$, est égal au terme $A_{p;q}$ pour $p = k \in [\![0;N]\!]$ et $q = n-k \in [\![0;N]\!]$ et le terme $A_{k;n-k}$, pour $N+1 \le n \le 2N$ et $n-N \le k \le N$, est égal au terme $A_{p;q}$ pour $p = k \in [\![0;N]\!]$ et $q = n-k \in [\![0;N]\!]$.
On a donc

$$\sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} A_{p;q} \;=\; \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} A_{k;n-k} \;+\; \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{k=n-N}^{N} A_{k;n-k}$$

et

$$d_N \;=\; \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\sum_{k=0}^{n-N-1} A_{k;n-k} + \sum_{k=N+1}^{n} A_{k;n-k} \right) .$$

Par (3.14) et le lemme 9.5, on a, pour $N \ge \max(E(|z_1|)+1; E(|z_2|)+1)$,

$$\begin{aligned}
|d_N| &\le \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\sum_{k=0}^{n-N-1} \left|A_{k;n-k}\right| + \sum_{k=N+1}^{n} \left|A_{k;n-k}\right| \right) \\
&\le \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\sum_{k=0}^{n-N-1} \frac{|z_1|^k \cdot |z_2|^{n-k}}{(k!) \cdot \big((n-k)!\big)} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{|z_1|^k \cdot |z_2|^{n-k}}{(k!) \cdot \big((n-k)!\big)} \right) \\
&\le \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\frac{|z_2|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{n-N-1} \frac{|z_1|^k}{k!} + \frac{|z_1|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \sum_{k=N+1}^{n} \frac{|z_2|^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\
&\le \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\frac{|z_2|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{n-N-1} \frac{|z_1|^k}{k!} + \frac{|z_1|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \sum_{\ell=0}^{n-N-1} \frac{|z_2|^\ell}{\ell!} \right) .
\end{aligned}$$

D'après (9.14) avec $x = |z_1|$ et (9.14) avec $x = |z_2|$, on a, pour $N \geq \max(E(|z_1|) + 1; E(|z_2|) + 1)$,

$$\begin{aligned} |d_N| &\leq \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\frac{|z_2|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \exp(|z_1|) \,+\, \frac{|z_1|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \exp(|z_2|) \right) \\ &\leq N \cdot \frac{|z_2|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \exp(|z_1|) \,+\, N \cdot \frac{|z_1|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \exp(|z_2|) \\ &\leq \frac{|z_2|^N}{N!} \cdot |z_2| \cdot \exp(|z_1|) \,+\, \frac{|z_1|^N}{N!} \cdot |z_1| \cdot \exp(|z_2|) \,. \end{aligned}$$

Par le lemme 9.5, les suites $(|z_2|^N/(N!))_{N\in\mathbb{N}}$ et $(|z_1|^N/(N!))_{N\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.40), on déduit des inégalités précédentes que la suite d tend vers 0.
On a montré (9.9).
Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après (9.9) avec $z_1 = z$ et $z_2 = -z$, on a $1 = \exp(0) = \exp(z + (-z)) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$. Comme ce produit est non nul, chaque facteur est non nul donc $\exp(z) \neq 0$. De plus, $\exp(-z)$ est l'inverse de $\exp(z)$.
On a montré (9.10).
Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (\exp(nz) = (\exp(z))^n)$.
Comme $\exp(0 \cdot z) = \exp(0) = 1 = (\exp(z))^0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a, par (9.9) et l'hypothèse de récurrence,

$$\exp\big((n+1) \cdot z\big) \;=\; \exp\big(nz \,+\, z\big) \;=\; \exp(nz) \,\cdot\, \exp(z) \;=\; \big(\exp(z)\big)^n \,\cdot\, \exp(z) \;=\; \big(\exp(z)\big)^{n+1} \,.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.7 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela montre (9.11) lorsque $p \in \mathbb{N}$.
Pour $p \in \mathbb{Z}^-$, $n := |p| \in \mathbb{N}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a donc $\exp(nz) = (\exp(z))^n$. Par définition,

$$\big(\exp(z)\big)^p \;=\; \frac{1}{\big(\exp(z)\big)^n} \;=\; \frac{1}{\exp(nz)} \;=\; \exp(-nz) \;=\; \exp(pz)\,,$$

d'après (9.10).
On a montré (9.11).
Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a, par (9.14), $\exp(x) \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $x \in \mathbb{R}^-$, $-x \in \mathbb{R}^+$ donc $\exp(-x) \in \mathbb{R}^{+*}$. Comme $\exp(x) = 1/\exp(-x)$, on a aussi $\exp(x) \in \mathbb{R}^{+*}$.
On a montré (9.12).
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après (9.8) et (9.9),

$$\big|\exp(ix)\big|^2 \;=\; \overline{\exp(ix)} \cdot \exp(ix) \;=\; \exp\big(\overline{ix}\big) \cdot \exp(ix) \;=\; \exp(-ix) \cdot \exp(ix) \;=\; \exp(0) \;=\; 1\,.$$

Donc le module de $\exp(ix)$ est 1, c'est-à-dire $\exp(ix) \in \mathcal{U}$.
On a montré (9.13). □

On montre maintenant une propriété de dérivabilité.

Proposition 9.9. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \exp(\alpha t)$. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée par, pour $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \alpha \exp(\alpha t)$.*

Preuve : On montre d'abord que f est dérivable en 0.
Pour $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$ et $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| \leq 1$, on a, par la proposition 3.9,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{N} \frac{(\alpha h)^n}{n!} \,-\, 1 \,-\, \alpha h \right| &= \left| \sum_{n=2}^{N} \frac{(\alpha h)^n}{n!} \right| \;\leq\; \sum_{n=2}^{N} \frac{|\alpha|^n \cdot |h|^n}{n!} \;\leq\; \sum_{n=2}^{N} \frac{|\alpha|^n \cdot |h|^2}{n!} \\ &\leq h^2 \cdot \sum_{n=2}^{N} \frac{|\alpha|^n}{n!} \;\leq\; h^2 \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{|\alpha|^n}{n!} \;\leq\; h^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{n!} \;=\; h^2 \cdot \exp(|\alpha|)\,, \end{aligned} \tag{9.15}$$

d'après (9.14). Comme la suite

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(\alpha h)^n}{n!} - 1 - \alpha h\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

tend vers $\exp(\alpha h) - 1 - \alpha h$, quand N tend vers $+\infty$, la suite

$$\left(\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{(\alpha h)^n}{n!} - 1 - \alpha h\right|\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

tend vers $|\exp(\alpha h) - 1 - \alpha h|$, par la proposition 3.40. Par passage à la limite $N \to +\infty$ dans les inégalités (9.15) (cf. proposition 3.43), on obtient

$$\big|\exp(\alpha h) - 1 - \alpha h\big| \ \le\ h^2 \cdot \exp(|\alpha|)\,.$$

Soit $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\eta(0) = 0$ et, pour $h \neq 0$, $\eta(h) = (\exp(\alpha h) - 1 - \alpha h)h^{-1}$. On a donc, pour $0 < |h| \le 1$, $|\eta(h)| \le h \exp(|\alpha|)$. Comme $\lim\limits_{h\to 0} h \exp(|\alpha|) = 0$, on en déduit, par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.40), que $\lim\limits_{h\to 0} \eta(h) = 0$.
De plus, comme $1 = \exp(0) = f(0)$, on a, pour $h \in \mathbb{R}$, $f(h) = f(0) + \alpha h + h\eta(h)$. Par la proposition 6.1, on a montré que f est dérivable en 0 de nombre dérivé α.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On montre que f est dérivable en t. Pour $h \in \mathbb{R}^*$, on a, d'après (9.9),

$$\begin{aligned} f(t+h) \ &=\ \exp\big(\alpha(t+h)\big) \ =\ \exp(\alpha t)\cdot\exp(\alpha h) \ =\ f(t)\cdot\exp(\alpha h) \\ &=\ f(t) \,+\, \alpha\cdot f(t)\cdot h \,+\, hf(t)\cdot\eta(h)\,. \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0} \eta(h) = 0$, on a $\lim\limits_{h\to 0} f(t)\eta(h) = 0$ par la proposition 4.31, donc f est dérivable en t de nombre dérivé $\alpha f(t)$, d'après la proposition 6.1. □

Pour compléter les propriétés précédentes de l'exponentielle complexe, on fait une étude plus précise de la fonction f de la proposition 9.9 pour $\alpha = i$.

Proposition 9.10. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$ donnée par $\varphi(t) = \exp(it)$. La fonction φ est surjective. L'ensemble $B := \{t > 0;\, \Im\varphi(t) = 0\}$ est non vide et $T := 2\inf B > 0$. L'image réciproque $\varphi^{-1}(\{1\})$ du singleton $\{1\}$ par φ soit donnée par $\varphi^{-1}(\{1\}) = T\mathbb{Z} := \{T\cdot k;\, k \in \mathbb{Z}\}$. En particulier, on a*

$$\forall\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,, \quad \big(\varphi(x_1) \ =\ \varphi(x_2)\big) \iff \big(x_1 - x_2 \in T\mathbb{Z}\big)\,. \tag{9.16}$$

L'application φ est T-périodique i.e.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \varphi(x + T) \ =\ \varphi(x)\,.$$

On a $\varphi(0) = 1$, $\varphi(T/4) = i$, $\varphi(T/2) = -1$ et $\varphi(3T/4) = -i$. Enfin, φ est bijective de $]-T/2; T/2]$ sur $\mathcal{U}$.

Il se trouve que le T donné par cette proposition 9.10 est en fait égal à 2π, comme on le verra dans la proposition 9.13 ci-dessous.

Pour préparer la preuve de cette proposition 9.10, on procède d'abord par une étude des parties réelle et imaginaire de la fonction φ.

Lemme 9.11. *Les fonctions $\Re\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [-1; 1]$ et $\Im\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [-1; 1]$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Leurs dérivées sont données par $(\Re\varphi)' = -\Im\varphi$ et $(\Im\varphi)' = \Re\varphi$. De plus, $\Re\varphi$ est une fonction paire et $\Im\varphi$ est une fonction impaire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(\Re\varphi(x))^2 + (\Im\varphi(x))^2 = 1$.*
L'ensemble $B = \{t > 0;\, \Im\varphi(t) = 0\}$ est non vide. On pose $b = \inf B$.
La fonction $\Im\varphi$ est strictement positive sur $]0; b[$. On a $\Im\varphi(0) = \Im\varphi(b) = \Im\varphi(2b) = 0$. Elle est strictement négative sur $]b; 2b[$. Elle est strictement croissante sur $[0; b/2]$ et sur $[3b/2; 2b]$, et strictement décroissante sur $[b/2; 3b/2]$.

La fonction $\Re\varphi$ est strictement décroissante sur $[0;b]$ et strictement croissante sur $[b;2b]$. On a $\Re\varphi(0) = \Re\varphi(2b) = 1$ et $\Re\varphi(b) = -1$. Elle est strictement positive sur $[0;b/2[$ et sur $]3b/2;2b]$. Elle est strictement négative sur $]b;3b/2[$.
En particulier, on a $\varphi(0) = 1$, $\varphi(b/2) = i$, $\varphi(b) = -1$ et $\varphi(3b/2) = -i$.

Preuve : Tout d'abord, φ est à valeurs dans $\mathcal{U}$, d'après (9.13). Donc, par (2.4), $\Re\varphi$ et $\Im\varphi$ sont à valeurs dans $[-1;1]$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $1 = |\varphi(x)|^2 = (\Re\varphi(x))^2 + (\Im\varphi(x))^2$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, par (9.8),

$$\varphi(-x) \;=\; \exp(-ix) \;=\; \exp\big(\overline{ix}\big) \;=\; \overline{\exp(ix)} \;=\; \overline{\varphi(x)}$$

donc $\Re\varphi(-x) = \Re\varphi(x) =$ et $\Im\varphi(-x) = -\Im\varphi(x)$. Donc $\Re\varphi$ est paire et $\Im\varphi$ est impaire.
La fonction conjuguée de φ est la fonction $\overline{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$ qui, à $t \in \mathbb{R}$, associe $\overline{\varphi(t)} = \exp(-it)$, d'après (9.8). Par la proposition 9.9, on sait que φ et $\overline{\varphi}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc aussi continues (cf. proposition 6.18). Par les propositions 6.16 et 6.18, il en est de même des parties réelle $\Re\varphi$ et imaginaire $\Im\varphi$ de φ, puisque $\Re\varphi = (\varphi + \overline{\varphi})/2$ et $\Im\varphi = (\varphi - \overline{\varphi})/(2i)$.
De plus, toujours par la proposition 9.9, on a $\varphi' = i\varphi$, $\overline{\varphi}' = -i\overline{\varphi}$ donc, par la proposition 6.6,

$$\big(\Re\varphi\big)' \;=\; \frac{\varphi' + \overline{\varphi}'}{2} \;=\; i\cdot\frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2} \;=\; -\Im\varphi \quad\text{et}\quad \big(\Im\varphi\big)' \;=\; \frac{\varphi' - \overline{\varphi}'}{2i} \;=\; i\cdot\frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2i} \;=\; \Re\varphi\,.$$

Comme $\varphi(0) = \exp(0) = 1$, on a $\Re\varphi(0) = 1$ et $\Im\varphi(0) = 0$. Comme $\Re\varphi$ est continue, il existe un voisinage V_0 de 0 tel que $\Re\varphi > (1/2)$ sur V_0 (cf. proposition 4.34). Sur V_0, $\Im\varphi$ est strictement croissante (cf. corollaire 6.13). En particulier, $\Im\varphi > 0$ sur $V_0\cap]0;+\infty[$.
Supposons que $\Im\varphi > 0$ sur $]0;+\infty[$. Par le corollaire 6.13, $\Re\varphi$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Par la proposition 4.36, $\ell = \lim\limits_{t\to+\infty} \Re\varphi$ existe dans $\mathbb{R}$.

a). Premier cas : $\ell \geq 0$. Alors $\Re\varphi > 0$ sur $]0;+\infty[$ (cf. proposition 4.36), donc $\Im\varphi$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ (cf. corollaire 6.13) et donc strictement positive sur $]0;+\infty[$. Soit $t_0 > 0$. Par le théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.12), on a, pour $t > t_0$, l'existence d'un $c \in]t_0;t[$ tel que $\Re\varphi(t) = \Re\varphi(t_0) - \Im\varphi(c)(t-t_0) \leq \Re\varphi(t_0) - \Im\varphi(t_0)(t-t_0)$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \Re\varphi(t_0) - \Im\varphi(t_0)(t-t_0) = -\infty$, on a, par le théorème des gendarmes (cf. proposition 4.34), $\lim\limits_{t\to+\infty} \Re\varphi(t) = -\infty$. Contradiction avec l'unicité de la limite en $+\infty$ de $\Re\varphi$ (cf. proposition 4.11).

b). Second cas : $\ell < 0$. Par la proposition 4.36, $\ell = \inf(\Re\varphi_{|]0;+\infty[})$ et, comme $\Re\varphi$ est minoré par -1, $\ell \geq -1$. Comme $\ell/2 > \ell$, $\ell/2$ ne minore pas l'ensemble $\Re\varphi(]0;+\infty[)$. Il existe donc $t_1 > 0$ tel que $\Re\varphi(t_1) < (\ell/2) < 0$. Par le théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.12), on a, pour $t > t_1$, l'existence d'un $c \in]t_1;t[$ tel que $\Im\varphi(t) = \Im\varphi(t_1) + \Re\varphi(c)(t-t_1) \leq \Im\varphi(t_1) + \Re\varphi(t_1)(t-t_1)$, car $\Re\varphi$ est décroissante sur $[t_1;+\infty[$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \Im\varphi(t_1) + \Re\varphi(t_1)(t-t_1) = -\infty$, on a, par le théorème des gendarmes (cf. proposition 4.34), $\lim\limits_{t\to+\infty} \Im\varphi(t) = -\infty$. Contradiction avec le fait que $\Im\varphi$ est minotée par -1 (cf. proposition 4.34).

Dans tous les cas, on a obtenu une contradiction. Il existe donc $t_1 > 0$ tel que $\Im\varphi(t_1) \leq 0$. Nécessairement, $t_1 \notin V_0$. Soit $t_0 \in V_0\cap]0;+\infty[$. Comme $\Im\varphi(t_0) > 0$, $\Im\varphi(t_1) \leq 0$ et $\Im\varphi$ est continue, il existe, par le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1), un t_2 compris entre t_0 et t_1 tel que $\Im\varphi(t_2) = 0$. Comme $t_2 > 0$, l'ensemble $B = \{t > 0;\, \Im\varphi(t) = 0\}$ est non vide et $b = \inf B$ est bien défini.
Comme $\Im\varphi > 0$ sur $V_0\cap]0;+\infty[$, $B \cap V_0\cap]0;+\infty[= \emptyset$. Comme V_0 est un voisinage de 0, il existe $\delta > 0$ tel que $]-\delta;\delta[\subset V_0$ donc $]0;\delta[\subset V_0\cap]0;+\infty[$. En particulier, $B\cap]0;\delta[= \emptyset$. Donc, pour tout $t \in]0;\delta[$, t minore B. Donc $b \geq \delta > 0$.
Comme $b = \inf B$, il existe, par la proposition 3.45, une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B telle que $\lim u = b$. Comme $\Im\varphi$ est continue, on a, par la proposition 4.15, $\lim \Im\varphi(u) = \Im\varphi(b)$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in B$ donc $\Im\varphi(u_n) = 0$, on obtient $\Im\varphi(b) = 0$.
Si l'on avait, pour un $t \in]0;b[$, $\Im\varphi(t) \leq 0$ et on aurait, comme $\Im\varphi(\delta/2) > 0$ et $\Im\varphi$ est continue, un t_2 entre t et $\delta/2$ tel que $\Im\varphi(t_2) = 0$, par le le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1). On aurait donc $t_2 \in B$ et $t_2 < b$. Contradiction avec la définition de b.

Donc, pour tout $t \in]0; b[$, $\Im\varphi(t) > 0$. En particulier, $\Re\varphi$ est strictement décroissante sur $[0; b]$ (cf. corollaire 6.13). Comme $\Re\varphi(0) = 1$, $\Re\varphi(b) < 1$. Par ailleurs, comme $\varphi(b) \in \mathcal{U}$ et $\Im\varphi(b) = 0$, $\Re\varphi(b) \in \{-1; 1\}$. On en déduit que $\Re\varphi(b) = -1$. D'où $\varphi(b) = -1$.
Pour $t \in]b; 2b[$, $t - b \in]0; b[$ et, comme $\varphi(t) = \varphi((t-b)+b) = \varphi(t-b)\varphi(b) = -\varphi(t-b)$ (cf. (9.9)), on a donc $\Im\varphi(t) = -\Im\varphi(t-b) < 0$. Donc $\Im\varphi < 0$ sur $]b; 2b[$ et, par le corollaire 6.13, $\Re\varphi$ est strictement croissante sur $[b; 2b]$.
Comme $\varphi(b) = -1$ et comme $\varphi(2b) = (\varphi(b))^2$ par (9.9), on a $\varphi(2b) = 1$. En particulier, $\Re\varphi(2b) = 1$ et $\Im\varphi(2b) = 0$. Comme $\varphi(b/2)^2 = \varphi(b) = -1$, par (9.9), $\varphi(b/2)$ est solution de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par $z^2 = -1$. Donc $\varphi(b/2) \in \{-i; i\}$. Comme $\Im\varphi > 0$ sur $]0; b[$, on a nécessairement $\varphi(b/2) = i$ et, en particulier, $\Re\varphi(b/2) = 0$ et $\Im\varphi(b/2) = 1$. Comme $\varphi(3b/2) = \varphi(b/2)\varphi(b)$, par (9.9), on a $\varphi(3b/2) = -i$ et, en particulier, $\Re\varphi(3b/2) = 0$ et $\Im\varphi(3b/2) = -1$.
Comme $\Re\varphi$ est strictement décroissante sur $[0; b]$ et nulle en $b/2$, elle est strictement positive sur $[0; b/2[$ et strictement négative sur $]b/2; b]$. Comme $\Re\varphi$ est strictement croissante sur $[b; 2b]$ et nulle en $3b/2$, elle est strictement négative sur $[b; 3b/2[$ et strictement positive sur $]3b/2; 2b]$.
Par le corollaire 6.13, on en déduit que $\Im\varphi$ est strictement croissante sur $[0; b/2]$ et $[3b/2; 2b]$, et est strictement décroissante sur $[b/2; 3b/2]$. □

Preuve de la proposition 9.10 : Par le lemme 9.11, φ est bien à valeurs dans $\mathcal{U}$, B est non vide et $T = 2b > 0$.
Encore par le lemme 9.11, comme $\varphi(b) = -1$ et comme, pour $t \in]0; 2b[\setminus\{b\}$, $\Im\varphi(t) \neq 0$, on a, pour tout $t \in]0; 2b[=]0; T[$, $\varphi(t) \neq 1$. Cependant $\varphi(T) = \varphi(2b) = \Re\varphi(2b) + i\Im\varphi(2b) = 1$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a, par (9.9), $\varphi(x+T) = \varphi(x) \cdot \varphi(T) = \varphi(x)$. Donc φ est T-périodique. De plus, d'après le lemme 9.11, on a $\varphi(0) = 1$, $\varphi(T/4) = \varphi(b/2) = i$, $\varphi(T/2) = \varphi(b) = -1$ et $\varphi(3T/4) = \varphi(3b/2) = -i$.
Pour $p \in \mathbb{Z}$, on a, d'après (9.11), $\varphi(pT) = (\varphi(T))^p = 1^p = 1$. Donc $T\mathbb{Z} \subset \varphi^{-1}(\{1\})$.
Soit $x \notin T\mathbb{Z}$. On a $x \neq 0$ et, si $x > 0$, $\varphi(x) = \varphi(|x|)$, et, si $x < 0$, $\varphi(x) = \varphi(-|x|) = 1/\varphi(|x|)$, d'après (9.10). Par la propriété d'Archimède (cf. (1.4)), l'ensemble $D := \{m \in \mathbb{N}; m \geq (|x|/T)\}$ est non vide. Il admet donc un minimum (cf. proposition 1.13), qui est strictement positif car $0 \notin D$. Soit $n = \min(D) - 1 \in \mathbb{N}$ et $r := |x| - nT$. Comme $n \notin D$, $nT < |x|$. Comme $n+1 \in D$ et $|x| \notin T\mathbb{Z}$, $(n+1)T > |x|$. Donc $r \in]0; T[$. De plus, $\varphi(|x|) = \varphi(nT + r) = \varphi(nT) \cdot \varphi(r) = (\varphi(T))^n \cdot \varphi(r) = \varphi(r)$, d'après (9.9) et (9.11). Comme $r \in]0; T[$, $\varphi(r) \neq 1$ donc $\varphi(|x|) \neq 1$ et $\varphi(x) \neq 1$. On a donc montré que $(\mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z}) \subset (\mathbb{R} \setminus \varphi^{-1}(\{1\}))$ donc, par passage au complémentaire dans $\mathbb{R}$, $\varphi^{-1}(\{1\}) \subset T\mathbb{Z}$.
On a montré que $T\mathbb{Z} = \varphi^{-1}(\{1\})$.
Soit $(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$. D'après (9.9) et (9.10), on a $\varphi(x_1 - x_2) = \varphi(x_1)/\varphi(x_2)$. Donc

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \iff \varphi(x_1 - x_2) = 1 \iff x_1 - x_2 \in \varphi^{-1}\big(\{1\}\big) \iff x_1 - x_2 \in T\mathbb{Z}\,.$$

On a montré (9.16).
Cela montre aussi que la restriction de φ à $]-T/2; T/2] =]-b; b]$ est injective. En effet, si $(x_1, x_2) \in]-T/2; T/2]^2$ vérifie $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ alors, par (9.16), il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x_1 - x_2 = kT$. En particulier, l'intervalle $]-1/2; 1/2]$ contient l'entier $(x_1 - x_2)/T = k$. Comme cet intervalle ne contient qu'un seul entier, par la proposition 9.2, et comme il contient 0, on a forcément $k = 0$ c'est-à-dire $x_1 = x_2$.
Il reste à montrer que φ est surjective et que la restriction de φ à $]-T/2; T/2] =]-b; b]$ est surjective. On remarque que la seconde propriété implique la première.
Comme, par le lemme 9.11, $\Re\varphi$ est strictement décroissante sur $[0; b]$ et continue sur $[0; b]$, $\Re\varphi$ est bijective de $[0; b]$ sur $\Re\varphi([0; b])$, par la proposition 7.5. Par la proposition 7.6,

$$\Re\varphi\big([0; b]\big) = \big\{\Re\varphi(0); \Re\varphi(b)\big\} \cup \Big]\lim_b \Re\varphi\,;\, \lim_0 \Re\varphi\Big[= [\Re\varphi(b)\,;\, \Re\varphi(0)] = [-1; 1]\,.$$

Soit $z_0 \in \mathcal{U}$. Par (2.4), $\Re(z_0) \in [-1; 1] = \Re\varphi([0; b])$. Il existe donc $t_0 \in [0; b]$ tel que $\Re\varphi(t_0) = \Re(z_0)$.
Si $\Im(z_0) \geq 0$ alors

$$\Im(z_0) = \sqrt{1 - \Re(z_0)^2} = \sqrt{1 - \Re\varphi(t_0)^2} = \Im\varphi(t_0)$$

car $\Im\varphi(t_0) \geq 0$. Dans ce cas, $z_0 = \varphi(t_0)$.
Si $\Im(z_0) < 0$ alors $\Im(\overline{z_0}) > 0$ et, d'après ce qui précède, il existe $t_0 \in [0; b[$ tel que $\overline{z_0} = \varphi(t_0)$. Donc $z_0 = \overline{\varphi(t_0)} = \varphi(-t_0)$, d'après (9.8), avec $-t_0 \in]-b; 0]$.

On a montré que $z_0 \in \varphi(]-b;b])$. Comme ceci est valable pour tout $z_0 \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subset \varphi(]-b;b])$. Comme $\varphi(]-b;b]) \subset \varphi(\mathbb{R})$ et comme φ est à valeurs dans $\mathcal{U}$, on a $\varphi(]-b;b]) \subset \varphi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{U}$. On a donc $\varphi(]-b;b]) = \varphi(\mathbb{R}) = \mathcal{U}$ et, par la proposition 7.2, la restriction de φ à $]-b;b] =]-T/2;T/2]$ est surjective. $\square$

Pour identifier le T de la proposition 9.10 à 2π, on a besoin de définir la longueur du cercle $\mathcal{U}$. Pour ce faire, on introduit la notion de ligne brisée portée par $\mathcal{U}$.

Définition 9.12. *Soit T le réel strictement positif introduit dans la proposition 9.10.*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle subdivision de $]-T/2;T/2]$ de taille n toute application strictement croissante $\sigma : [\![1;n]\!] \longrightarrow]-T/2;T/2]$. Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble de telles subdivisions de taille n et

$$\mathcal{S} \; = \; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n$$

l'ensemble de toutes les subdivisions de $]-T/2;T/2]$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on appelle ligne brisée portée par $\mathcal{U}$ à n morceaux de subdivision σ la famille $b = (\exp(i\sigma_j))_{j\in[\![1;n]\!]}$ de points de $\mathcal{U}$. Pour une telle famille b, en posant $\sigma_{n+1} := \sigma_1 + T$, le morceau d'incide j, avec $j \in [\![1;n]\!]$, de b est le segment complexe reliant $\exp(i\sigma_j)$ à $\exp(i\sigma_{j+1})$. La longueur de ce segment est

$$\left|e^{i\sigma_{j+1}} - e^{i\sigma_j}\right| \; \geq \; 0\,.$$

La longueur d'une ligne brisée portée par $\mathcal{U}$ à n morceaux de subdivision $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est la somme des longueurs de ces morceaux c'est-à-dire

$$L(\sigma) \; := \; \sum_{j=1}^{n} \left|e^{i\sigma_{j+1}} - e^{i\sigma_j}\right| \; \geq \; 0\,.$$

On définit la longueur L de $\mathcal{U}$ par $L := \sup\{L(\sigma);\, \sigma \in \mathcal{S}\} \in (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\})$.

Proposition 9.13. *Le réel T, introduit dans la proposition 9.10, est égal à la longueur L de $\mathcal{U}$.*

D'après la définition usuelle du nombre π, 2π est égal au périmètre du cercle de centre 0 et de rayon 1, c'est-à-dire la longueur de $\mathcal{U}$. On a donc montré que $T = 2\pi$.
Pour préparer la preuve de la proposition 9.13, on établit le résultat suivant.

Lemme 9.14. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|e^{it} - 1| \leq |t|$.*

Preuve : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = (t^2/2) + \cos(t)$. Comme cos et la fonction polynômiale $t \mapsto t^2/2$ sont de classe C^1 (cf. lemme 9.11 et proposition 6.20), f est de classe C^1, par la proposition 6.18. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = t - \sin(t)$. Comme sin et la fonction polynômiale $t \mapsto t$ sont de classe C^1 (cf. lemme 9.11 et proposition 6.20), f' est dérivable et, pour $t \in \mathbb{R}$, $f''(t) = 1 - \cos(t) \geq 0$, d'après le lemme 9.11 et la proposition 6.20. Par le corollaire 6.13, f' est donc croissante. Comme $f'(0) = 0$, f' est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$. De nouveau par le corollaire 6.13, f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. f est donc minorée par $f(0) = 1$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a, par (9.8) et la définition de cos,

$$\left|e^{it} - 1\right|^2 \; = \; \left(e^{it} - 1\right)\cdot\left(e^{-it} - 1\right) \; = \; 2 - 2\cos(t)$$

donc

$$t^2 - \left|e^{it} - 1\right|^2 \; = \; t^2 + 2\cos(t) - 2 \; = \; 2f(t) - 2 \; \geq \; 0\,,$$

puisque f est minorée par 1. Comme $|t|$ et $|e^{it} - 1|$ sont positifs et la fonction $\sqrt{\cdot}$ est croissante (cf. proposition 8.13),

$$|t| \; = \; \sqrt{t^2} \; \geq \; \sqrt{\left|e^{it} - 1\right|^2} \; = \; \left|e^{it} - 1\right|\,,$$

ce qui donne le résultat cherché. □

Preuve de la proposition 9.13 : Soit $A := \{L(\sigma);\, \sigma \in \mathcal{S}\}$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Par (9.9) et (9.10), on a

$$L(\sigma) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \left|e^{i\sigma_j}\right| \cdot \left|e^{i(\sigma_{j+1}-\sigma_j)} \,-\, 1\right| \;=\; \sum_{j=1}^{n} \left|e^{i(\sigma_{j+1}-\sigma_j)} \,-\, 1\right| . \tag{9.17}$$

D'après (3.14) et le lemme 9.14, on déduit de (9.17) que

$$L(\sigma) \;\leq\; \sum_{j=1}^{n} |\sigma_{j+1}-\sigma_j| \;=\; \sum_{j=1}^{n} (\sigma_{j+1}-\sigma_j)\, .$$

Or, d'après la proposition 3.9, on a

$$\sum_{j=1}^{n} (\sigma_{j+1}-\sigma_j) \;=\; \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{j+1}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j\right) \;=\; \left(\sum_{k=2}^{n+1} \sigma_k\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j\right)$$

$$= \sigma_{n+1} \,+\, \left(\sum_{k=2}^{n} \sigma_k\right) - \left(\sum_{j=2}^{n} \sigma_j\right) \,-\, \sigma_1 \;=\; \sigma_{n+1} \,-\, \sigma_1 \;=\; T\, .$$

D'où $L(\sigma) \leq T$. Ceci étant vrai pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$, T majore A donc $\sup A \leq T$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on considère la subdivision $\sigma^{(p)} : [\![1;p]\!] \longrightarrow]-T/2;T/2]$ de $]-T/2;T/2]$ de taille p définie par, pour $j \in [\![1;p]\!]$,

$$\sigma_j^{(p)} \;=\; -\frac{T}{2} \,+\, \frac{T}{p} \cdot j$$

On considère la suite $u = (L(\sigma^{(p)}))_{p\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a, d'après (9.17),

$$u_p \;=\; \sum_{j=1}^{p} \left|e^{i\left(\sigma_{j+1}^{(p)}-\sigma_j^{(p)}\right)} \,-\, 1\right| \;=\; \sum_{j=1}^{p} \left|e^{i\frac{T}{p}} \,-\, 1\right| \;=\; p \cdot \left|e^{i\frac{T}{p}} \,-\, 1\right|$$

d'après (3.15). Par la proposition 9.9, la fonction $\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(it)$ est dérivable en 0 de nombre dérivé $i\varphi(0) = i$ donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{it} \,-\, 1}{t} \;=\; i\, .$$

Comme $\lim_{p\to+\infty} T/p = 0$, on a, par la proposition 4.15,

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{e^{i\frac{T}{p}} \,-\, 1}{T/p} \;=\; i$$

donc, par la proposition 3.41,

$$\lim_{p\to+\infty} p \cdot \left(e^{i\frac{T}{p}} \,-\, 1\right) \;=\; iT\, .$$

D'où, en utilisant (3.33), on obtient

$$\lim_{p\to+\infty} u_p \;=\; \left|iT\right| \;=\; T\, .$$

Par la proposition 3.45, le majorant T de A est en fait la borne supérieure de A. D'où $L = T$. □

On termine cette partie en établissant deux formules pour la fonction “argument principal” définie dans la définition 8.6.

Proposition 9.15. *On rappelle que, pour $z \in \mathbb{C}^*$, l'argument principal* $\mathrm{Arg}(z)$ *de z est le réel défini dans la définition 8.6. On rappelle que la fonction* Arctan *est définie dans la proposition 8.23. On note par $\mathbb{R}^-$ la partie de $\mathbb{C}$ définie par $\{z \in \mathbb{C};\ \Re(z) \leq 0$ et $\Im(z) = 0\}$.*

1. *Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\Re(z) > 0$, l'argument principal* $\mathrm{Arg}(z)$ *de z est donné par*
$$\mathrm{Arg}(z) \;=\; \mathrm{Arctan}\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right). \tag{9.18}$$
2. *Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, l'argument principal* $\mathrm{Arg}(z)$ *de z est donné par*
$$\mathrm{Arg}(z) \;=\; 2 \cdot \mathrm{Arctan}\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z) + |z|}\right). \tag{9.19}$$

Preuve :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\Re(z) > 0$. En particulier, $z \neq 0$. Par la définition 8.6, $\mathrm{Arg}(z) \in]-\pi;\pi]$ et $\exp(i\mathrm{Arg}(z)) = z/|z|$. Par définition de sinus et cosinus (cf. définition 8.19), $\sin(\mathrm{Arg}(z)) = \Im(z)/|z|$ et $\cos(\mathrm{Arg}(z)) = \Re(z)/|z|$.
Par les propositions 9.10 et 9.13, π est égale au b du lemme 9.11. D'après ce dernier, on a, comme $\Re(z) > 0$, $\mathrm{Arg}(z) \in]-(\pi/2);(\pi/2)[$. Par définition de la fonction tangente (cf. définition 8.22),
$$\tan\big(\mathrm{Arg}(z)\big) \;=\; \frac{\Im(z)/|z|}{\Re(z)/|z|} \;=\; \frac{\Im(z)}{\Re(z)}.$$
Donc, par définition de l'arctangente (cf. proposition 8.23), on obtient la formule (9.18).
2. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$. Si $\Im(z) \neq 0$ alors $|\Re(z)| = \sqrt{|z|^2 - (\Im(z))^2} < |z|$ donc $-\Re(z) < |z|$ et $\Re(z)+|z| > 0$. Si $\Im(z) = 0$ alors $\Re(z) > 0$ donc $\Re(z) + |z| > 0$. Le membre de droite de (9.19) est donc bien défini dans tous les cas.
Le nombre complexe $z+|z|$ vérifie $\Re(z+|z|) = \Re(z)+|z| > 0$, d'après ce qui précède, et $\Im(z+|z|) = \Im(z)$. Donc, par 1,
$$\mathrm{Arg}\big(z + |z|\big) \;=\; \mathrm{Arctan}\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z) + |z|}\right). \tag{9.20}$$
Comme $\Re(z + |z|) > 0$, $z + |z| \neq 0$. On a, en utilisant $|z|^2 = z\overline{z} \neq 0$,
$$\begin{aligned}\left(\frac{z+|z|}{\big|z+|z|\big|}\right)^2 \;&=\; \frac{\big(z+|z|\big)^2}{\big(z+|z|\big)\cdot\big(\overline{z}+|z|\big)} \;=\; \frac{z^2 + 2z|z| + |z|^2}{|z|^2 + z|z| + \overline{z}|z| + |z|^2} \\ &=\; \frac{z\cdot\big(z + 2|z| + \overline{z}\big)}{|z|\cdot\big(|z| + z + \overline{z} + |z|\big)} \;=\; \frac{z}{|z|}.\end{aligned}$$
Donc, par (9.11),
$$e^{2i\mathrm{Arg}(z+|z|)} \;=\; \left(e^{i\mathrm{Arg}(z+|z|)}\right)^2 \;=\; \left(\frac{z+|z|}{\big|z+|z|\big|}\right)^2 \;=\; \frac{z}{|z|} \;=\; e^{i\mathrm{Arg}(z)}.$$
D'après (9.16), sachant que $T = 2\pi$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{Arg}(z) = 2\mathrm{Arg}(z+|z|) + 2\pi k$. Comme $\mathrm{Arg}(z) \in]-\pi;\pi]$ et $\mathrm{Arg}(z+|z|) \in]-(\pi/2);(\pi/2)[$, on a $|\mathrm{Arg}(z) - 2\mathrm{Arg}(z+|z|)| < 2\pi$ d'où $|k| < 1$. On en déduit que l'entier k est nul ce qui donne $\mathrm{Arg}(z) = 2\mathrm{Arg}(z+|z|)$. En appliquant (9.20), on en déduit (9.19). □

Table des matières