# Rappels sur $\mathbb{C}$.

**Exercice 1. : Applications $\mathbb{R}$-linéaires et $\mathbb{C}$-linéaires.**

1. Soit $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$-linéaire. Montrer qu'elle est $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Soit $w \in \mathbb{C}$ et $L_w$ la multiplication par $w$ c'est-à-dire l'application $L_w : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $z \in \mathbb{C}$, $L_w(z) = wz$. Montrer que $L_w$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
3. Soit $w \in \mathbb{C}$ et $L_w$ la multiplication par $w$. D'après les questions précédentes, $L_w$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Donner la matrice de $L_w$ dans la base canonique $(1; i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ en fonction des coordonnées $(x_0; y_0)$ de $w$ dans cette base.
4. Soit $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$-linéaire. Montrer qu'il existe $w \in \mathbb{C}$ tel $L$ est la multiplication $L_w$ par $w$. (Indication : on prendra $w = L(1)$.)
5. Soit $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Soit
$$A := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$
avec $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$, la matrice de $L$ dans la base canonique $(1; i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Montrer que $L$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si $a = d$ et $b = -c$.
Dans le cas où $a = d$ et $b = -c$, que vaut le $w$ du 4 ?
6. Montrer que la conjugaison complexe $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $\bar{\cdot}(z) = \overline{z}$, le conjugué de $z$, est $\mathbb{R}$-linéaire mais n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

**Remarque :** les points 2 et 3 montre qu'une application $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement s'il existe $w \in \mathbb{C}$ tel $\varphi$ est la multiplication $L_w$ par $w$.

**Exercice 2. : Produit scalaire et module.** Soit $z_1 = (x_1; y_1) \in \mathbb{C}$ et $z_2 = (x_2; y_2) \in \mathbb{C}$. On rappelle que le produit scalaire $\langle z_1;\, z_2 \rangle$ est donné par $x_1x_2 + y_1y_2$.

1. Vérifier que $\langle z_1;\, z_2 \rangle = \mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) = \mathrm{Re}\,(z_2\overline{z_1})$.
2. Vérifier que $z_1\overline{z_1}$ est un réel positif et que $|z_1| = \sqrt{z_1\overline{z_1}}$.
3. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
$$\mathcal{P} := \big(\forall (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2\,, \quad |z_1 + z_2| \;\le\; |z_1| + |z_2|\big)\,,$$
$$\mathcal{Q} := \big(\forall (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2\,, \quad \big||z_1| - |z_2|\big| \;\le\; |z_1 - z_2|\big)\,.$$
(Indication : on changera le nom des variables dans l'une des propositions.)

4. On remarque que l'inégalité dans $\mathcal{P}$ est une égalité si $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$. On suppose désormais $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$. Montrer que

$$\big(|z_1 + z_2| \ = \ |z_1| + |z_2|\big) \iff \big(\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^{+*}\,;\ z_1 \ = \ \lambda z_2\big) \iff \big(\mathrm{Arg}(z_1) \ = \ \mathrm{Arg}(z_2)\big)\,.$$

5. Montrer que le module est aussi une norme sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

D'après le cours, la proposition $\mathcal{P}$ est vraie. C'est l'inégalité triangulaire.

**Exercice 3. :** Soit $(w; z) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\overline{z}w \neq 1$, $|w| = |z| = 1$. Montrer que

$$\left|\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}\right| \ = \ 1\,.$$

**Exercice 4. :** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$E_n \ := \ \sum_{k=0}^{n-1} \exp(ik\theta)\,,\ C_n \ := \ \sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n \ := \ \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\theta)\,.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire $E_n$ comme une fonction de $n$.

2. En déduire une expression de $C_n$ et $S_n$ en fonction de $n$.

3. Que peux-on dire de $E_p$ si $p \in \mathbb{N}$ vérifie $p\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ ?

**Exercice 5. :** Soit $\theta \in [0; 2\pi[$.

1. Donner le module et un argument de $z = e^{i\theta} - 1$.

2. Montrer que $|e^{i\theta} - 1| \leq \theta$. (Indication : on pourra appliquer le théorème des accroissements finis à une fonction appropriée.)

**Exercice 6. :** Soit $(z_1; z_2; z_3) \in (\mathbb{C}^*)^3$ tel que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ et $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

1. Montrer que $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$. (Indication : on pourra mettre les $z_j$ sous forme exponentielle.)

2. Interpréter le résultat précédent.

3. Donner un exemple de triplet $(z_1; z_2; z_3)$ qui vérifie les hypothèses précédentes. (Indication : on pourra s'inspirer de l'exercice 4.)

**Exercice 7. :** On donne ici une expression pour l'argument principal d'un nombre complexe non nul. On introduit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{C}^*$ :

$$\Omega_+ \ := \ \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}\,(z) > 0 \big\} \ \text{et}\ \mathbb{R}^- \ := \ \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}\,(z) < 0 \,\text{et}\ \mathrm{Im}\,(z) = 0 \big\}\,.$$

1. Vérifier que, pour $z \in \Omega_+$, $\mathrm{Arg}\,(z) \in ]-\pi/2;\pi/2[$.
2. Montrer que, pour $z \in \Omega_+$,
$$\mathrm{Arg}\,(z) \ = \ \mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}\,(z)}{\mathrm{Re}\,(z)}\right)\,. \tag{1}$$
3. Vérifier que la formule (1) est fausse pour $z = i - 1$.
4. Soit $\theta \in ]-\pi;\pi[$. Vérifier que
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \ = \ \frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)}\,.$$
5. En déduire que, pour $z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$, on a
$$\mathrm{Arg}\,(z) \ = \ 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}\,(z)}{\mathrm{Re}\,(z)\ +\ |z|}\right)\,. \tag{2}$$

**Exercice 8. :** Soit $(z_1; z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tel que $z_1 \neq z_2$. La droite $\mathcal{D}$ passant par $z_1$ et $z_2$ est, par définition, l'ensemble

$$\big\{ z \in \mathbb{C}\,;\ \exists\,\lambda \in \mathbb{R}\,;\ z - z_1 \ = \ \lambda(z_2 - z_1) \big\}\,.$$

Le vecteur $z_2 - z_1$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
Par définition, le segment reliant $z_1$ à $z_2$, noté $[z_1; z_2]$, est

$$\big\{ z \in \mathbb{C}\,;\ \exists\,\lambda \in [0;1]\,;\ z - z_1 \ = \ \lambda(z_2 - z_1) \big\}\,.$$

1. Montrer que
$$\mathcal{D} \ = \ \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\ \exists\,t \in \mathbb{R}\,;\ z \ = \ tz_2 \ + \ (1-t)z_1 \big\}$$
et que
$$[z_1; z_2] \ = \ \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\ \exists\,t \in [0;1]\,;\ z \ = \ tz_2 \ + \ (1-t)z_1 \big\}\,.$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $iz$ est orthogonal à $z$.
3. En déduire que
$$\mathcal{D} = \ \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\ \big\langle z - z_1;\, i(z_2 - z_1) \big\rangle \ = \ 0 \big\}\,.$$

**Exercice 9. :** Soit $(z_0; z_1) \in \mathbb{C}^2$ et $(r_0; r_1) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

1. Montrer l'équivalence

$$D(z_0; r_0[ \cap D(z_1; r_1[ \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| < r_0 + r_1 .$$

2. Montrer l'équivalence

$$D(z_0; r_0[ \subset D(z_1; r_1[ \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| + r_0 \leq r_1 .$$

3. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.

   a). Montrer que $D(z_0; r[$ est un ouvert qui est étoilé par rapport à $z_0$.

   b). Montrer que $D(z_0; r]$ est un fermé.

   c). Montrer que $\overline{D(z_0; r[} = D(z_0; r]$.

   d). Montrer que

   $$C(z_0; r) = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \ |z|^2 - z_0 \overline{z} - z \overline{z_0} + |z_0|^2 = r^2 \right\} .$$

   (Indication : pour $z \in \mathbb{C}$, on pourra développer $|z - z_0|^2$.)

   En particulier, l'intérieur de $D(z_0; r[$ est $D(z_0; r[$ et son bord, défini comme étant son adhérence privée de son intérieur, est $D(z_0; r] \setminus D(z_0; r[ = C(z_0; r)$. En fait, on peut montrer que $D(z_0; r[$ est convexe.

4. Soit $B$ une partie non vide de $\mathbb{C}$. Montrer que $B$ est bornée si et seulement s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r_0 > 0$ tel que $B \subset D(z_0; r_0[$.

**Exercice 10. :** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. On rappelle que $z$ est un point d'accumulation de $A$ si, pour tout $r > 0$, $(D(z; r[ \setminus \{z\}) \cap A \neq \emptyset$. On rappelle qu'un point $a \in A$ est isolé s'il existe $r > 0$ tel que $D(a; r[ \cap A = \{a\}$.

1. Soit $D := \{1/n ; n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que tous les éléments de $D$ sont isolés. Montrer que 0 est un point d'accumulation de $D$.

2. Montrer que $z$ est un point d'accumulation de $A$ si et seulement si $z \in \overline{A \setminus \{z\}}$.

3. Soit $\Omega$ un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Montrer que tout point de l'adhérence $\overline{\Omega}$ de $\Omega$ est un point d'accumulation de $\Omega$.

**Exercice 11. :** On considère les parties non vides de $\mathbb{C}$ suivantes :

$$A := \left\{ z \in \mathbb{C} ; \ \mathrm{Re}\,(z) \in ]1; 2[ \right\}, \quad B := \left\{ z \in \mathbb{C}^* ; \ \mathrm{Arg}\,(z) \in ]\pi/4; \pi/3[ \right\} \quad \text{et} \quad C := [-1; 1].$$

1. Soit $\Omega$ une partie non vide convexe de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. Montrer que $\Omega$ est étoilé par rapport à $z_0$.

2. Soit $\Omega$ une partie non vide étoilée de $\mathbb{C}$. Montrer que $\Omega$ est connexe par arcs.
3. Soit $\Omega$ une partie non vide convexe (resp. étoilée) de $\mathbb{C}$. Montrer que l'adhérence $\overline{\Omega}$ de $\Omega$ est convexe (resp. étoilée).
4. Montrer que $A$ et $C$ sont convexes.
5. Montrer que $B$ est convexe.
6. Montrer que la réunion $C \cup D(2;1[$ n'est pas convexe.
7. Montrer que la réunion $B \cup D(0;1[$ n'est pas convexe.
8. Montrer que la réunion $C \cup D(2;1[$ est étoilée.
9. Montrer que la réunion $B \cup D(0;1[$ est étoilée.
10. Montrer que la réunion $D(-2;1[ \cup C \cup D(2;1[$ n'est pas étoilée mais connexe par arcs.
11. Montrer que la réunion $A \cup D(0;1[$ n'est pas connexe par arcs.

**Exercice 12. : Intérieur d'un triangle.**
Soit $(u,v;w) \in \mathbb{C}^3$ tel que $u \neq v$, $v \neq w$, $w \neq u$ et $w$ n'appartient pas à la droite passant par $u$ et $v$. Soit $T$ le triangle de sommets $u$, $v$ et $w$. On rappelle que $T$ est, par définition, l'ensemble

$$\left\{z \in \mathbb{C}\,;\ \exists\,(s;t) \in [0;1]^2\,;\ z \ = \ sv_t \ + \ (1-s)u \text{ avec } v_t \ = \ tw \ + \ (1-t)v\right\}.$$

Par définition, le bord $\partial T$ de $T$ est la réunion des segments $[u;v]$, $[v;w]$ et $[w;u]$ et l'intérieur de $T$ est l'ensemble $T \setminus \partial T$. On rappelle que, par définition, pour $(a;b) \in \mathbb{C}^2$, le segment $[a;b]$ est l'ensemble

$$\left\{z \in \mathbb{C}\,;\ \exists\,\lambda \in [0;1]\,;\ z - a \ = \ \lambda\,(b-a)\right\}.$$

Soit $\mathrm{sgn} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et $\mathrm{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$.

1. Vérifier que
$$[u;v] \ = \ \left\{z \in \mathbb{C}\,;\ \exists\,s \in [0;1]\,;\ z \ = \ sv \ + \ (1-s)u\right\}.$$
2. En déduire que
$$\partial T \ = \ \left\{z \in \mathbb{C}\,;\ \exists\,(s;t) \in \big(\{1\}\times[0;1]\big)\cup\big([0;1]\times\{0;1\}\big)\,;\ z \ = \ s(tw+(1-t)v)+(1-s)u\,\right\}.$$
3. Soit $\mathcal{D}_u$ la droite passant par $u$ et parallèle à la droite joignant $v$ et $w$. Montrer que
$$\mathbb{C} \setminus \mathcal{D}_u \ = \ \left\{z \in \mathbb{C}\,;\ \exists\,(s;t) \in (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})\,;\ z \ = \ s(tw \ + \ (1-t)v) \ + \ (1-s)u\,\right\}.$$
En déduire que $T \cap \mathcal{D}_u = \{u\}$ et $(T \setminus \partial T) \cap \mathcal{D}_u = \emptyset$.

4. Soit $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = a\,\mathrm{Re}\,(z) + b\,\mathrm{Im}\,(z) + c$. Montrer que l'application $f - f(0)$ est $\mathbb{R}$-linéaire et que

$$\forall\,(z_1;z_2) \in \mathbb{C}^2\,,\quad \forall\,t \in \mathbb{R}\,,\quad f\big(tz_1 + (1-t)z_2\big) \;=\; tf(z_1) \;+\; (1-t)f(z_2)\,.$$

5. Soit $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ trois applications de la forme du 4 telles que la droite passant par $u$ et $v$ est l'ensemble $f_1^{-1}(\{0\})$, la droite passant par $v$ et $w$ est l'ensemble $f_2^{-1}(\{0\})$ et la droite passant par $w$ et $u$ est l'ensemble $f_3^{-1}(\{0\})$. Vérifier $f_1(w) \neq 0$, $f_2(u) \neq 0$ et $f_3(v) \neq 0$.

6. Construire $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ trois applications de la forme du 4 telles que la droite passant par $u$ et $v$ est l'ensemble $g_1^{-1}(\{0\})$ et $g_1(w) > 0$, la droite passant par $v$ et $w$ est l'ensemble $g_2^{-1}(\{0\})$ et $g_2(u) > 0$, et la droite passant par $w$ et $u$ est l'ensemble $g_3^{-1}(\{0\})$ et $g_3(v) > 0$.

7. Montrer que, pour $z \in (T \setminus \partial T)$, on a $g_1(z) > 0$, $g_2(z) > 0$ et $g_3(z) > 0$.

8. Montrer que, pour $z \in \mathbb{C} \setminus ((T \setminus \partial T) \cup \mathcal{D}_u)$, il existe $j \in [\![1;3]\!]$ tel que $g_j(z) \leq 0$.

9. Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $g_1(u+\lambda(v-w)) = \lambda g_1(w)$ et $g_3(u+\lambda(v-w)) = -\lambda g_3(v)$. En déduire que, pour $z \in \mathcal{D}_u$, on a $g_1(z) \leq 0$ ou $g_3(z) \leq 0$.

10. Montrer que l'intérieur $T \setminus \partial T$ du triangle $T$ est l'intersection des ensembles $g_1^{-1}(]0;+\infty[)$, $g_2^{-1}(]0;+\infty[)$ et $g_3^{-1}(]0;+\infty[)$.

11. Montrer que l'intérieur $T \setminus \partial T$ du triangle $T$ est l'intersection des ensembles

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1 \;&:=\; \big\{z \in \mathbb{C}\,;\;\; f_1(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{sgn}(f_1(z)) \;=\; \mathrm{sgn}(f_1(w))\big\}\,,\\
\mathcal{U}_2 \;&:=\; \big\{z \in \mathbb{C}\,;\;\; f_2(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{sgn}(f_2(z)) \;=\; \mathrm{sgn}(f_2(u))\big\}\,,\\
\mathcal{U}_3 \;&:=\; \big\{z \in \mathbb{C}\,;\;\; f_3(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{sgn}(f_3(z)) \;=\; \mathrm{sgn}(f_3(v))\big\}\,.
\end{aligned}$$

12. Montrer que $T \setminus \partial T$ est un ouvert convexe.

13. Montrer que $T$ est un fermé convexe.

14. Soit $z \in \partial T$. Montrer que $z$ n'appartient pas à l'intérieur $\mathring{T}$ de $T$.

**Remarque :** Comme $T$ est fermé (cf. 16), l'adhérence $\overline{T}$ de $T$ est donc $T$. Comme $T \setminus \partial T$ est ouvert (cf. 16), $T \setminus \partial T \subset \mathring{T}$, l'intérieur de $T$. Comme $\mathring{T} \subset T$ et comme, d'après 17, $\mathring{T} \cap \partial T = \emptyset$, $\mathring{T} = T \setminus \partial T$. Au sens de la topologie, le bord de $T$ est $\overline{T} \setminus \mathring{T}$ qui est bien égale à $\partial T$.
Si l'on prend $(u;v;w) \in \mathbb{C}^3$ avec $u \neq v$ et $w$ appartenant à la droite passant par $u$ et $v$, on constate que $T$ est un segment de $\mathbb{C}$, que $T = \partial T$ est fermé et l'intérieur de $T$ est vide. Il en est de même si l'on prend $(u;v;w) \in \mathbb{C}^3$ tel que deux au moins sont égaux.