Séries entières, exponentielle et logarithmes.

Exercice 34. : Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0. Soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de la série alternée $\sum(-1)^n a_n$.

1. Montrer que la suite $(S_{2n})_n$ est décroissante.
2. Montrer que la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(S_{2n} - S_{2n+1})_n$ est positive et tend vers 0.
4. Les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont donc adjacentes. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ leur limite commune. Montrer que la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ converge vers ℓ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_{2n+1} \;\leq\; \ell \;\leq\; S_{2n} \,.$$

Exercice 35. : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$s_1 \;:=\; \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^n}\,, \quad s_2 \;:=\; \sum_{n\geq 2} \frac{z^n}{2n^2 \,-\, n}\,, \quad s_3 \;:=\; \sum_{n\geq 2} \frac{z^n}{\ln(n)}\,, \quad s_4 \;:=\; \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}\,,$$

pour $(p;q) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$s_5 \;:=\; \sum_{n\geq 0} \frac{(np)!}{(n!)^q}\, z^n\,, \quad s_6 \;:=\; \sum_{n\geq 0} z^{n!}\,, \quad s_7 \;:=\; \sum_{n\geq 0} 2^n\, z^{(n^2)}\,, \quad s_8 \;:=\; \sum_{n\geq 0} (n!)\, z^n\,.$$

Exercice 36. : Pour chacune des séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence et la somme.

$$s_1 \;:=\; \sum_{n\geq 0} 3^n\, z^n\,, \quad s_2 \;:=\; \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}\,, \quad s_3 \;:=\; \sum_{n\geq 0} (2n+1)\, z^{2n}\,, \quad s_4 \;:=\; \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n+1}\,,$$

avec $a_n = 3^n$ si n est pair et $a_n = 2^{-n}$ si n est impair et avec $\theta \in \mathbb{R}$,

$$s_5 \;:=\; \sum_{n\geq 0} a_n\, z^n, \quad s_6 \;:=\; \sum_{n\geq 0} n\,(n{+}1)\, z^n, \quad s_7 \;:=\; \sum_{n\geq 0} \sin(n\theta)\, z^n, \quad s_8 \;:=\; \sum_{n\geq 0} \frac{\sin(n\theta)}{n!}\, z^n.$$

Exercice 37. : Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. On considère la série entière centrée en z_0 donnée par

$$s \;:=\; \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}}\,(z \,-\, z_0)^n\,.$$

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme f de la série entière centrée en z_0.
2. Déterminer f' et montrer qu'elle est la somme d'une série entière que l'on précisera.
3. Trouver une primitive de f.

Exercice 38. : Trigonométrie complexe. On note par sin (resp. cos) la fonction sinus (resp. cosinus) définie sur $\mathbb{C}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z})$ et $\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.
3. Montrer que sinus et cosinus sont non bornées sur $\mathbb{C}$.
4. Montrer que
$$\begin{aligned} \sin^{-1}\big(\{0\}\big) \; &= \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \exists\, k \in \mathbb{Z}\,;\; z \,=\, k\pi \big\} \;=:\; \pi\,\mathbb{Z}\,, \\ \cos^{-1}\big(\{0\}\big) \; &= \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \exists\, k \in \mathbb{Z}\,;\; z \,=\, \frac{\pi}{2} \,+\, k\pi \big\} \;=:\; \frac{\pi}{2} \,+\, \pi\,\mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$
5. Soit $(w; z) \in \mathbb{C}^2$. Montrer les égalités
$$\begin{aligned} \sin(w+z) \; &= \; \sin(w)\,\cos(z) \,+\, \sin(z)\,\cos(w)\,, \\ \cos(w+z) \; &= \; \cos(w)\,\cos(z) \,-\, \sin(w)\,\sin(z)\,. \end{aligned}$$

Exercice 39. : Soit $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \cos^{-1}(\{0\})$ ($\cos^{-1}(\{0\})$ a été déterminé dans l'exercice 38). Soit $\tan : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par
$$\tan(z) \;:=\; \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \;=\; \frac{e^{iz} \,-\, e^{-iz}}{i\,(e^{iz} \,+\, e^{-iz})}\,.$$

1. Soit $w \in \mathbb{C}$. Pour $z \in \Omega_0$, montrer l'équivalence
$$\tan(z) \;=\; w \iff \left(Z \;=\; e^{2iz} \;\neq\; -1 \quad \text{et} \quad iw \;=\; \frac{Z \,-\, 1}{Z \,+\, 1} \right).$$
2. Soit $w \in \mathbb{C}$. Montrer que l'équation d'inconnue $z \in \Omega_0$ donnée par $\tan(z) = w$ n'a pas de solution si et seulement si $w = -i$.
3. Soit $w \in (\mathbb{C} \setminus \{-i\})$. Montrer que l'ensemble S_w des solutions de l'équation précédente s'écrit
$$S_w \;=\; \big\{ z_w \,+\, k\pi\,;\quad k \in \mathbb{Z} \big\} \;=:\; z_w \,+\, \pi\,\mathbb{Z}\,,$$
pour un z_w que l'on précisera.

4. Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ (c'est un ouvert) et $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$h(w) \ := \ \frac{1 + iw}{1 - iw} \ = \ -\frac{w - i}{w + i}\,.$$

   Déterminer l'ouvert

$$\Omega \ := \ h^{-1}\big(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-\big) \ = \ \big\{w \in U\,; \quad h(w) \ \in \ \big(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-\big)\big\}\,.$$

5. Par définition de Ω, la fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(w) = \mathrm{Log}(h(w))/(2i)$ est bien définie. Montrer que f est holomorphe et déterminer sa dérivée.

6. Montrer que la restriction à $\mathbb{R}$ de f est la fonction arctangente.

Exercice 40. : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\sum a_n(z - z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit f la somme de cette série entière. Montrer que f admet une primitive F sur $D(z_0; R[$ qui est la somme d'une série entière de rayon de convergence R.

Exercice 41. : Étoilé ?

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}^+$ est étoilé par rapport à $z_0 = re^{i(\theta+\pi)}$, pour tout $r > 0$.

2. Montrer que $\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé. Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.

3. Soit Ω un ensemble étoilé par rapport à un point $z_0 \in \Omega$ et T un triangle plein (cf. exercice 12). On suppose que le bord ∂T de T est inclus dans Ω.

   a). Soit $z \in (T \setminus \partial T)$ tel que $z \neq z_0$. Montrer qu'il existe $z_1 \in \partial T$ tel que $[z_0; z] \subset [z_0; z_1]$.

   b). En déduire que $T \subset \Omega$.

Exercice 42. : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On rappelle que la fonction argument principal Arg est $\mathrm{Arg}_{-\pi}$.

1. Soit $\theta_0 \in]-\pi; \pi]$ tel que $\theta - \theta_0 \in 2k\pi$, pour un $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathrm{Arg}_\theta = \mathrm{Arg}_{\theta_0} + 2k\pi$.
   L'application $\theta \mapsto \mathrm{Arg}_\theta$ est donc 2π-périodique. Il suffit de la connaître sur $]-\pi; \pi]$ pour la connaître partout.

2. Montrer que

$$\forall\, z \in \big(\mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}^+\big)\,, \quad \mathrm{Arg}_\theta(z) \ = \ \mathrm{Arg}\big(z \cdot e^{-i(\theta+\pi)}\big) \ + \ \theta \ + \ \pi\,.$$

Exercice 43. : Soit $(\theta_-;\theta_+) \in]-\pi;\pi]$ avec $\theta_- < \theta_+$. Soit

$$A_1 \;:=\; \big\{z \in \mathbb{C}^*\,;\ \mathrm{Arg}(z)\ \in]\theta_+;\pi]\big\}\,,\quad A_2 \;:=\; \big\{z \in \mathbb{C}^*\,;\ \mathrm{Arg}(z)\ \in]\theta_-;\theta_+[\big\}$$
$$\text{et}\quad A_3 \;:=\; \big\{z \in \mathbb{C}^*\,;\ \mathrm{Arg}(z)\ \in]-\pi;\theta_-[\big\}\,.$$

Montrer que,

1. pour $z \in A_1$, $\mathrm{Arg}_{\theta_-}(z) = \mathrm{Arg}_{\theta_+}(z) = \mathrm{Arg}(z)$,
2. pour $z \in A_2$, $\mathrm{Arg}_{\theta_+}(z) = \mathrm{Arg}_{\theta_-}(z) + 2\pi = \mathrm{Arg}(z) + 2\pi$,
3. pour $z \in A_3$, $\mathrm{Arg}_{\theta_+}(z) = \mathrm{Arg}_{\theta_-}(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2\pi$.

Exercice 44. : On rappelle que l'on note par ln le logarithme népérien sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer $\mathrm{Log}(i)$, $\mathrm{Log}(-1+i)$ et $\mathrm{Log}(-1-i)$, après avoir justifié leur existence.
2. Déterminer $\mathrm{Log}_0(i)$, $\mathrm{Log}_0(-1+i)$ et $\mathrm{Log}_0(-1-i)$, après avoir justifié leur existence.
3. Soit $z_0 = 1 - i\pi/3$ et $z_1 = 1 + i5\pi/3$. Vérifier que $\mathrm{Log}(z_0)$ et $\mathrm{Log}(z_1)$ sont bien définis et déterminer $\mathrm{Log}(z_0) - \mathrm{Log}(z_1)$.
4. Donner le plus grand sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$ sur lequel $\mathrm{Log} \circ \exp = \mathrm{Id}$.
5. Donner le plus grand sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$ sur lequel $\mathrm{Log}(\cdot/i)$ et Log sont définies. Établir sur Ω une relation entre ces deux fonctions.
6. Donner le plus grand sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$ sur lequel $\mathrm{Log}((\cdot)^2)$ et Log sont définies. Établir sur Ω une relation entre ces deux fonctions.
7. Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $r : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $r(z) = \exp(\mathrm{Log}(z)/2)$.
   a). Vérifier que, pour $z \in \Omega$, $r(z)^2 = z$ et que la restriction de r à $\mathbb{R}^{+*}$ coïncide avec la restriction à $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction racine carré sur $\mathbb{R}^+$.
   b). Déterminer $r(i)$ et $r(-1+i)$.
   c). Trouver z_1 et z_2 dans Ω tels que $z_1 z_2 \in \Omega$ mais $r(z_1)r(z_2) \neq r(z_1 z_2)$.

Exercice 45. : Soit $\mathbb{R}^- := \{z \in \mathbb{C}\,; \mathrm{Re}\,(z) \leq 0\,, \mathrm{Im}\,(z) = 0\}$ et $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. On considère les fonctions $r : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$r(x;y) \;:=\; \sqrt{x^2 + y^2}\,,\quad g(x;y) \;:=\; x + r(x;y)\,,\quad h(x;y) \;:=\; \frac{y}{g(x;y)}$$
$$\text{et}\quad L(x;y) \;:=\; \ln\big(r(x;y)\big) + 2i\,\mathrm{Arctan}\big(h(x;y)\big)$$

1. Montrer que r et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
   En particulier, h et L sont bien définies.

2. Montrer que r, g et h sont de classe C^1 et déterminer leurs dérivées partielles premières.

3. En déduire que L est C^1. Montrer que L vérifie les identités de Cauchy-Riemann. Par le cours, L est holomorphe.

4. Soit $B := \{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Im}\,(z) \in]-\pi;\pi[\}$. Montrer que $\exp \circ L = \mathrm{Id}_\Omega$ et $L \circ \exp = \mathrm{Id}_B$. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 7).

Par le cours, L est en fait le logarithme principal Log.

Exercice 46. : Soit $z \in \mathbb{C}$. On rappelle qu'un complexe w est <u>une</u> racine carrée de z si $w^2 = z$. On a vu en L1 (en utilisant la forme exponentielle des nombres complexes) que tout nombre complexe non nul a exactement deux racines carrées non nulles (et elles sont opposées) et que 0 est la seule racine carrée de 0.
L'objectif de cet exercice est de voir si l'on peut construire une application continue (ou holomorphe) g sur un ensemble approprié telle que $g(z)^2 = z$, pour tout z.

1. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour $z \in \Omega$, $g(z)^2 = z$. Montrer que, si g est holomorphe, alors $0 \notin \Omega$.

2. Soit Ω un ouvert inclus dans $\mathbb{C}^*$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que, pour $z \in \Omega$, $g(z)^2 = z$.
   a). Montrer que g ne s'annule pas. Donner, pour $r > 0$ et θ, une expression de $g(re^{i\theta})$.
   b). Montrer que g est holomorphe et déterminer sa $\mathbb{C}$-dérivée g'.

3. On suppose qu'il existe une fonction $g : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que, pour $z \in \mathbb{C}^*$, $g(z)^2 = z$.
   a). Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}^*$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $g(z^2) = cz$.
   b). Soit $r > 0$ et $\gamma : [0; 2\pi] \ni t \mapsto re^{it}$. Montrer que
   $$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z \ = \ -\frac{4}{3}\, c\, r\sqrt{r}\,.$$
   (Indication : on pourra faire le changement de variable $t = 2s$ dans l'intégrale précédente et utiliser a).)
   c). Montrer que g admet une primitive.
   d). Établir une contradiction.

4. Donner une fonction $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que, pour tout $z \in \Omega$, $g(z)^2 = z$, la restriction de g à $\mathbb{R}^{+*}$ coïncide avec la restriction à $\mathbb{R}^{+*}$ de la racine carrée usuelle sur $\mathbb{R}^+$ et $g(-1) = i$.

5. Donner une fonction $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que, pour $z \in \Omega$, $g(z)^2 = z$, la restriction de g à $\mathbb{R}^{+*}$ coïncide avec la restriction à $\mathbb{R}^{+*}$ de la racine carrée usuelle sur $\mathbb{R}^+$ et $g(-1) = -i$.