Conséquences du théorème de Goursat.

Exercice 59. : On considère dans $\mathbb{C}$ le triangle T de sommets $\exp(-3i\pi/4) = -(1+i)/\sqrt{2}$, $\exp(-i\pi/4) = (1-i)/\sqrt{2}$ et $\exp(i\pi/2) = i$. Soit $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$, le chemin défini dans le cours et parcourant le bord ∂T de T, en partant de $\exp(-3i\pi/4)$ et en passant par $\exp(-i\pi/4)$ et i, dans cet ordre.

1. Vérifier que 0 est à l'intérieur du triangle T.
2. Montrer que les segments $[\exp(-3i\pi/4); \exp(-i\pi/4)]$ et $[\exp(-i\pi/4); i]$ ne rencontrent pas l'ensemble
$$\mathbb{R}^- := \left\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,(z) \leq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(z) = 0\right\} .$$
3. Montrer que le segment $[i; \exp(-3i\pi/4)]$ ne rencontre pas l'ensemble
$$\mathbb{R}^+ := \left\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,(z) \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(z) = 0\right\} .$$
4. Calculer l'intégrale
$$\int_\gamma \frac{dz}{z} .$$
5. Soit T_1 le translaté de T de 1, c'est-à-dire le triangle de sommets $1 + \exp(-3i\pi/4)$, $1 + \exp(-i\pi/4)$ et $1 + i$. On remarque que γ_1 est le chemin défini dans le cours et parcourant le bord ∂T_1 de T_1, en partant de $1 + \exp(-3i\pi/4)$ et en passant par $1 + \exp(-i\pi/4)$ et $1 + i$, dans cet ordre.
Calculer l'intégrale
$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} .$$
(Indication : on pourra vérifier que tout élément de T_1 a une partie réelle strictement positive.)

Exercice 60. : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z) = (e^z - 1)/z$ et par $f(0) = 1$.

1. Montrer que f est analytique sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que, pour tout $R > 0$,
$$\int_{-R}^{R} \frac{e^t - 1}{t}\, \mathrm{d}t \ = \ -i \int_0^\pi e^{(R\exp(i\theta))}\, \mathrm{d}\theta \ + \ i\pi .$$

3. Montrer que
$$\lim_{R\to+\infty} e^{-R}\int_{-R}^{0}\frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; 0\,.$$

4. En déduire que la limite
$$\lim_{R\to+\infty} e^{-R}\int_{0}^{R}\frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$$
existe. La déterminer.

Exercice 61. : Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{A}^+$ (resp. $\mathcal{A}^-$) l'ensemble des nombres complexes dont la seconde composante dans le repère $(0; e^{i\theta}; ie^{i\theta})$ est strictement positive (resp. négative). Soit $z_0\in e^{i\theta}\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que
$$\lim_{z\to z_0}(\mathrm{Arg}_\theta)_{|\mathcal{A}^+} \;=\; \theta \quad \text{et} \quad \lim_{z\to z_0}(\mathrm{Arg}_\theta)_{|\mathcal{A}^-} \;=\; \theta\,+\,2\pi\,.$$
(Indication : on pourra utiliser les exercices 7 et 42.)

Exercice 62. : Calcul d'indice.
Soit $\gamma:[a;b]\longrightarrow\mathbb{C}$ $(a<b)$ un chemin fermé et $z\in(\mathbb{C}\setminus\gamma([a;b]))$. D'après l'exercice 33 ou l'exercice 67, on a
$$\rho \;:=\; \inf\big\{|z\,-\,\gamma(t)|\,;\; t\in[a;b]\big\} \;>\; 0\,.$$
On suppose qu'il existe une demi-droite $\mathcal{D}$ issue de z, i.e. $\mathcal{D}=z+e^{i\theta}\mathbb{R}^+$, pour un $\theta\in\,]-\pi;\pi]$, telle que l'image réciproque $\gamma^{-1}(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par γ est un ensemble vide ou discret ne contenant pas $\gamma(a)=\gamma(b)$. Pour $t\in[a;b]$, soit $y(t)$ la seconde composante de $\gamma(t)$ dans le repère $(0; e^{i\theta}; ie^{i\theta})$.
On donne ici une formule pour calculer l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma;z)$ de z par rapport à γ, qui est défini par
$$\mathrm{Ind}(\gamma;z) \;:=\; \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}w}{w\,-\,z}\,.$$

1. On suppose $\gamma^{-1}(\mathcal{D})$ vide. Montrer que $\mathrm{Ind}(\gamma;z)=0$.
   (Indication : on pourra utiliser la fonction Log_θ.)

2. Soit $t_0\in\gamma^{-1}(\mathcal{D})$.

   a). Montrer qu'il existe $\delta_0>0$ tel que $]t_0-\delta_0;t_0+\delta_0[\,\cap\,\gamma^{-1}(\mathcal{D})=\{t_0\}$.

   b). Montrer que l'un des quatre cas suivants se produit :

   C1. Pour tout $t\in]t_0-\delta_0;t_0+\delta_0[\setminus\{t_0\}$, $y(t)>0$.
   C2. Pour tout $t\in]t_0-\delta_0;t_0+\delta_0[\setminus\{t_0\}$, $y(t)<0$.
   C3. Pour tout $t\in]t_0-\delta_0;t_0[$, $y(t)>0$ et, pour tout $t\in]t_0;t_0+\delta_0[$, $y(t)<0$.
   C4. Pour tout $t\in]t_0-\delta_0;t_0[$, $y(t)<0$ et, pour tout $t\in]t_0;t_0+\delta_0[$, $y(t)>0$.

c). Montrer que, dans les cas C1 et C2, on a

$$\lim_{\delta \to 0} \Big(\mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_0+\delta) \,-\, z\big) \,-\, \mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_0-\delta) \,-\, z\big)\Big) \;=\; 0\,.$$

d). Montrer que, dans le cas C3, on a

$$\lim_{\delta \to 0^+} \mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_0+\delta) \,-\, z\big) \;=\; \theta \,+\, 2\pi \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \to 0^+} \mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_0-\delta) \,-\, z\big) \;=\; \theta\,.$$

e). Montrer que, dans le cas C4, on a

$$\lim_{\delta \to 0^+} \mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_0+\delta) \,-\, z\big) \;=\; \theta \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \to 0^+} \mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_0-\delta) \,-\, z\big) \;=\; \theta \,+\, 2\pi\,.$$

3. Soit $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des $t \in \gamma^{-1}(\mathcal{D})$ pour lesquels le cas C1 ou le cas C2 se produit. Soit $\mathcal{E}_-$ l'ensemble des $t \in \gamma^{-1}(\mathcal{D})$ pour lesquels le cas C3 se produit. Soit $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des $t \in \gamma^{-1}(\mathcal{D})$ pour lesquels le cas C4 se produit. On pose $\mathcal{E} = \mathcal{E}_- \cup \mathcal{E}_+$. Pour $t \in \mathcal{E}$, on pose $\sigma(t) = -1$ si $t \in \mathcal{E}_-$ et $\sigma(t) = 1$ si $t \in \mathcal{E}_+$.
Soit $a < t_1 < \cdots < t_p < b$ tel que $\gamma^{-1}(\mathcal{D}) = \{t_1; \,\cdots\,; t_p\}$. Pour $t \in \mathcal{E}$, on note par $\delta(t)$ un $\delta_0 > 0$ validant 2. a), avec t_0 remplacé par t. Dans la suite, on considère des réels δ vérifiant

$$\delta \;\in\; \big]0;\, \min\{\delta(t)\,;\; t \in \gamma^{-1}(\mathcal{D})\}\big[\,.$$

D'après le cours, on peut écrire, pour tout $\delta > 0$ vérifiant la condition précédente,

$$\begin{aligned} 2i\pi\,\mathrm{Ind}(\gamma;\, z) \;=\; & \int_{\gamma_{|[a;\,t_1-\delta]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} \,+\, \sum_{k=2}^{p} \int_{\gamma_{|[t_{k-1}+\delta;\,t_k-\delta]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} \,+\, \int_{\gamma_{|[t_p+\delta;\,b]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} \\ & +\, \sum_{k=1}^{p} \int_{\gamma_{|[t_k-\delta;\,t_k+\delta]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

a). Montrer que

$$\int_{\gamma_{|[a;\,t_1-\delta]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} \;=\; \Big[\mathrm{Log}_\theta(\cdot - z)\Big]_{\gamma(a)}^{\gamma(t_1-\delta)}, \quad \int_{\gamma_{|[t_p+\delta;\,b]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} \;=\; \Big[\mathrm{Log}_\theta(\cdot - z)\Big]_{\gamma(t_p+\delta)}^{\gamma(b)}$$

et, pour $2 \le k \le p$,

$$\int_{\gamma_{|[t_{k-1}+\delta;\,t_k-\delta]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} \;=\; \Big[\mathrm{Log}_\theta(\cdot \,-\, z)\Big]_{\gamma(t_{k-1}+\delta)}^{\gamma(t_k-\delta)}\,.$$

b). Pour $1 \le k \le p$, montrer que

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\gamma_{|[t_k-\delta;\,t_k+\delta]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} \;=\; 0\,.$$

c). Justifier les égalités suivantes, quand $\delta \to 0$.

$$\begin{aligned} 2i\pi \operatorname{Ind}(\gamma;\, z) &= o(1) + \sum_{k=1}^{p} \Big(\operatorname{Log}_\theta\big(\gamma(t_k - \delta) - z\big) - \operatorname{Log}_\theta\big(\gamma(t_k + \delta) - z\big)\Big) \\ &= o(1) + \sum_{t \in \mathcal{E}} \Big(\operatorname{Log}_\theta\big(\gamma(t_k - \delta) - z\big) - \operatorname{Log}_\theta\big(\gamma(t_k + \delta) - z\big)\Big) \\ &= o(1) + 2i\pi \sum_{t \in \mathcal{E}} \sigma(t)\,. \end{aligned}$$

d). En déduire que $\operatorname{Ind}(\gamma;\, z) = \operatorname{Card} \mathcal{E}_+ - \operatorname{Card} \mathcal{E}_-$.

Appliquer la présente méthode pour retrouver les calculs d'indice faits jusqu'à présent.

Exercice 63. : On considère le chemin fermé $\gamma : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ donné par $\gamma(t) = e^{it}$, chemin qui est de classe C^1, et le chemin fermé Γ qui est la concaténation, dans cet ordre, des chemins $\Gamma_1 : [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\Gamma_2 = \psi_{2;-2} : [-2; 2] \longrightarrow \mathbb{C}$ donnés par $\Gamma_1(t) = 2e^{i(\pi - t)}$ et $\Gamma_2(t) = -2t + (1-t)2$, qui sont tous deux de classe C^1.

1. Montrer que

$$\int_\gamma \frac{w \exp(w)}{2w - 1}\, \mathrm{d}w = \frac{i\pi\sqrt{e}}{2} \quad \text{et} \quad \int_\gamma \frac{\exp\left(\frac{1}{w-2}\right)}{w}\, \mathrm{d}w = \frac{2i\pi}{\sqrt{e}}\,.$$

(Indication : on pourra utiliser la formule de Cauchy.)

2. Montrer que

$$\int_\gamma \exp\left(\frac{1}{w}\right) \mathrm{d}w = 2i\pi\,.$$

3. Montrer que

$$\int_\Gamma \frac{\cos(\pi w)}{1 + w^2}\, \mathrm{d}w = -\frac{\pi}{2}\left(e^{-\pi} + e^{\pi}\right).$$

Exercice 64. : Soit $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \Re(z) > 1\}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$f(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}\,,$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^z = \exp(z \ln(n))$.

1. Montrer que f est holomorphe sur Ω.

2. Donne une expression de sa $\mathbb{C}$-dérivée sur Ω.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n^a} \;=\; 0\,.$$

4. Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$. Montrer que la fonction $\mathbb{R}^{+*} \ni x \mapsto \ln(x)/x^a$ est décroissante sur $[e^{1/a}; +\infty[$. En déduire que, si $a > 1$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} \;=\; 0\,.$$

5. Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} \;=\; 0\,.$$

Exercice 65. : Soit $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$ et $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$F(z) \;:=\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-tz}\, \mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que F est bien définie et holomorphe.
2. Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, $F'(z) = -(1+z^2)^{-1}$.
3. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.
(Indication : on pourra écrire, pour $x > 1$, $e^{-tx} = e^{-t}e^{-t(x-1)}$.)
4. On considère la fonction f de l'exercice 39. Montrer que $F = (\pi/2) - f$.
5. On étudie la limite en 0 de la restriction de F à $\mathbb{R}^{+*}$.

   a). Montrer que
   $$\lim_{x \to 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-tx}\, \mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t\,.$$

   b). Montrer que, pour tout $x > 0$, on a
   $$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-tx}\, \mathrm{d}t \;=\; -\int_{\pi/2}^{+\infty} \cos(t)\, e^{-tx} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{x}{t}\right) \mathrm{d}t\,.$$

   c). En déduire que
   $$\lim_{x \to 0} F_{|\mathbb{R}^{+*}}(x) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t\,.$$

6. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t \;=\; \frac{\pi}{2}\,.$$

Exercice 66. : Soit $T(u;v;w)$ un triangle plein comme dans l'exercice 12. On pourra utiliser les résultats de cet exercice 12.
L'objectif de cet exercice est de montrer que le "diamètre" de T est inférieur à la moitié de son périmètre, c'est-à-dire

$$\sup_{(z;z')\in T^2} |z-z'| \leq \frac{L}{2}, \tag{9}$$

où $L = |u-v| + |u-w| + |v-w|$.

1. Montrer que $T \subset D(u;R]$ où $R = \max(|u-v|;|u-w|)$.
   En particulier, T est compact puisque T est fermé, d'après l'exercice 12.
2. Soit $(z;z') \in T^2$. Montrer qu'il existe $(z_1;z_1') \in (\partial T)^2$ tel que $[z;z'] \subset [z_1;z_1']$.
3. Soit $a,b,c \in \{u;v;w\}$, deux à deux distincts, et $z \in [a;b]$.
   a). Déterminer le maximum de la fonction $[0;1] \ni t \mapsto |z-(tb+(1-t)c)|^2$.
   b). En déduire que, pour tout $z' \in [b;c]$, $|z-z'| \leq \max(|z-b|;|z-c|)$.
4. Soit $a,b,c \in \{u;v;w\}$ deux à deux distincts. Soit $z \in [a;b]$. Montrer que $|z-c| \leq \max(|a-c|;|b-c|)$.
   (Indication : on pourra utiliser la fonction $[0;1] \ni t \mapsto |c-(tb+(1-t)a)|^2$).
5. Vérifier que $2\max(|u-v|;|u-w|;|v-w|) \leq L$.
6. En déduire (9).

Exercice 67. : Soit K un compact et F un fermé, tous deux non vides. La distance de K à F est définie par

$$d(K;F) := \inf\left\{|w-z|;\ w \in K,\ z \in F\right\}.$$

Par une propriété de la borne inférieure, on sait qu'il existe une suite $(w_n)_n$ d'éléments de K et une suite $(z_n)_n$ d'éléments de F telles que la suite $(|w_n - z_n|)_n$ tende vers $d(K;F)$.

1. La suite $(w_n)_n$ étant une suite dans le compact K, elle admet une sous-suite $(w_{\varphi(n)})_n$ convergeant vers un certain $w \in K$. Montrer que la sous-suite $(z_{\varphi(n)})_n$ de $(z_n)_n$ est bornée.
2. En déduire qu'il existe une extractrice $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $(w_{\psi(n)})_n$ converge vers w et $(z_{\psi(n)})_n$ converge vers un certain $z \in F$.
3. Montrer que $d(K;F) = |w-z|$.
4. Montrer que $K \cap F = \emptyset$ si et seulement si $d(K;F) > 0$.

5. On note $\rho := d(K; F)/2$ et on suppose $\rho > 0$. Soit

$$K' \ := \ \left\{ z' \in \mathbb{C} \, ; \ \exists \, z \in K \, ; \ |z' \, - \, z| \ \leq \ \rho \right\} .$$

Montrer que K' est compact contenant K et que $K' \cap F = \emptyset$.

Exercice 68. : Soit F un fermé non vide de $\mathbb{C}$. Soit $d(\cdot; F) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\forall \, z \in \mathbb{C} \, , \quad d(z; F) \ := \ \inf \left\{ |w \, - \, z| \, ; \ w \in F \right\} .$$

1. Vérifier que $d(\cdot; F)$ est bien définie.
2. Montrer que $d(\cdot; F)$ est 1-lipschitzienne, i.e.

$$\forall \, (z; z') \in \mathbb{C}^2 \, , \quad \left| d(z; F) \, - \, d(z'; F) \right| \ \leq \ |z \, - \, z'| \, .$$

En particulier, $d(\cdot; F)$ est continue.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $R > d(z; F)$. Montrer que $F \cap D(z; R]$ est non vide et que $d(z; F) = d(z; F \cap D(z; R])$. En déduire qu'il existe $w \in F$ tel que $d(z; F) = |z - w|$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $d(z; F) = 0$ si et seulement si $z \in F$.

Exercice 69. : "Logarithme le long d'une courbe continue".
Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Soit $\mathcal{I} = \gamma([a; b])$. On pose $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

1. Soit $\psi : [a; b] \longrightarrow \mathcal{U}$ une application continue.

   a). Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une suite croissante $(t_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ d'éléments de $[a; b]$ telle que $t_0 = a$, $t_n = b$ et

$$\forall \, k \in [\![0; n-1]\!] \, , \quad \forall (t; t') \in [t_k; t_{k+1}]^2 \, , \quad |\psi(t) \, - \, \psi(t')| \ < \ 1 \, .$$

   (Indication : on pourra utiliser le fait que ψ est uniformément continue, cf. exercice 33).

   b). Soit $(A_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ la suite récurrente finie définie par $A_0 := -\pi + \operatorname{Arg}(\psi(a))$ et, pour $k \in [\![0; n-1]\!]$,

$$A_{k+1} \ := \ -\pi \ + \ \operatorname{Arg}_{A_k}\big(\psi(t_{k+1})\big) \, .$$

   Montrer que, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $\operatorname{Arg}_{A_k}(\psi(t_k)) = A_k + \pi$.

   c). Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Montrer que, pour $(A; A') \in \mathbb{R}^2$,

$$\forall \, t \in [t_k; t_{k+1}] \, , \quad \cos\Big(\operatorname{Arg}_A\big(\psi(t)\big) \ - \ \operatorname{Arg}_{A'}\big(\psi(t_k)\big) \Big) \ > \ 0 \, .$$

d). En déduire que

$$\forall\, t \in [t_k; t_{k+1}]\,, \quad \mathrm{Arg}_{A_k}\big(\psi(t)\big) \;\in\; \Big]A_k + \frac{\pi}{2}\,;\, A_k + \frac{3\pi}{2}\Big[\;.$$

(Indication : on pourra utiliser c) avec $A = A' = A_k$.)
En particulier, pour $t = t_{k+1}$, on a $A_k - \pi/2 < A_{k+1} < A_k + \pi/2$.

e). Montrer que, pour $t \in [t_k; t_{k+1}]$, on a $\mathrm{Arg}_{A_{k+1}}(\psi(t)) = \mathrm{Arg}_{A_k}(\psi(t))$ et

$$\mathrm{Arg}_{A_k}\big(\psi(t)\big) \;\in\; \Big(\big]A_k\,;\, A_k + 2\pi\big[\; \cap\; \big]A_{k+1}\,;\, A_{k+1} + 2\pi\big[\Big)\;.$$

2. Soit $z_0 \in (\mathbb{C} \setminus \mathcal{I})$.

a). Montrer qu'il existe une fonction continue $\theta : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, t \in [a; b]\,, \quad \gamma(t) - z_0 \;=\; |\gamma(t) - z_0|\, \exp\big(i\theta(t)\big)\;. \tag{10}$$

(Indication : on pourra appliquer le 1 à $\psi(t) = (\gamma(t) - z_0)|\gamma(t) - z_0|^{-1}$ et, sur chaque intervalle $[t_k; t_{k+1}]$, définir θ par une fonction argument appropriée.)

b). On suppose que γ est un chemin de classe C^1. Montrer que l'on peut trouver une fonction $\theta : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1, vérifiant (10).

c). On suppose que γ est un chemin (donc continu et C^1 par morceaux). Montrer que l'on peut trouver une fonction $\theta : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et C^1 par morceaux, vérifiant (10).

d). On suppose que γ est un chemin. Montrer que l'on a

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z_0} \;=\; \ln\left(\frac{|\gamma(b) - z_0)|}{|\gamma(a) - z_0)|}\right) + i\,\big(\theta(b) - \theta(a)\big)\,,$$

où θ est une fonction trouvée au 2. c).
En particulier, si γ est fermé, $\gamma(b) = \gamma(a)$ donc l'intégrale précédente vaut $i(\theta(b) - \theta(a))$.

3. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\gamma_n : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ le chemin fermé, de classe C^1, donné par $\gamma_n(t) = e^{int}$. Montrer que $\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(0) = n$.

4. Soit $\gamma_1 : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ le chemin fermé, de classe C^1, donné par $\gamma_1(t) = e^{it}$ et $z_0 = r_0 e^{it_0}$ avec $r_0 \in [0; 1[$ et $t_0 \in [-\pi; \pi[$. Montrer que la fonction $\theta : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\begin{array}{rcll} \theta(t) & = & t_0 + \mathrm{Arg}\big(e^{i(t-t_0)} - r_0\big) & \text{si} \quad t \in [0; t_0 + \pi]\,, \\ \theta(t) & = & t_0 + \mathrm{Arg}\big(e^{i(t-t_0)} - r_0\big) + 2\pi & \text{si} \quad t \in]t_0 + \pi; 2\pi]\,, \end{array}$$

est continue et satisfait (10) avec γ remplacé par γ_1. En déduire $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_0) = 1$.